Travail d'étude et de recherche

# Théorème de Nash-Moser

# Table des matières

# Introduction

*You must be a novice in analysis or a genius like Nash to believe anything like that can be ever true and/or to have a single nontrivial application. [This] may strike you as realistic as a successful performance of perpetuum mobile with a mechanical implementation of Maxwell's demon... unless you start following Nash's computation and realize to your immense surprise that the smoothing does work in the hands of John Nash.*

---

Mikhaïl GROMOV

Afin de prouver l'existence locale de solutions aux équations à dérivées partielles, le théorème d'inversion locale sur les espaces de Banach est souvent utilisé. Cependant, celui-ci nécessite pour être appliqué une condition d'inversion sur la différentielle de l'application étudiée. Ce n'est pas toujours le cas — il existe des situations dans lesquelles ce critère d'inversion n'est pas vérifié.
En 1956 Josh Forbes NASH introduisit dans [NASH 1956] une nouvelle méthode pour résoudre le problème des plongements isométriques. Cette méthode permet également de trouver des solutions à des équations aux dérivées partielles, en particulier dans les cas où les méthodes usuelles d'inversion locale ne sont pas applicables. Jürden MOSER simplifia la méthode de Nash et la démontra dans des cas plus généraux. Cette méthode est depuis appelée méthode de Nash-Moser. Puis, Lars HÖRMANDER améliora le schéma itératif de Moser en réduisant la perte de régularité par l'utilisation d'un schéma plus proche de celui que Nash avait introduit.

Dans ce TER, nous nous proposons d'étudier la preuve du théorème de Nash-Moser-Hörmander pas à pas dans un cas simple, à partir d'un article de Paolo SECCHI paru dans [SECCHI 2016]. Afin de mieux comprendre le rôle des différents paramètres dans la preuve du théorème de Nash-Moser, nous énoncerons et prouverons ce théorème pour les paramètres simples énoncés : $m_0 = 0$, $r = r' = s = s' = 1$.

Avant d'étudier plus en détails ce théorème, nous allons nous intéresser aux situations dans lesquelles le théorème d'inversion locale sur les espaces de Banach peut être utilisé. En particulier, nous verrons deux méthodes de résolution d'équations, utilisant un procédé itératif qui converge vers la solution : l'*itération de Picard* et la *méthode de Newton*.

# 1. L'itération de Picard et la méthode de Newton

Soient $X, Y$ deux espaces de Banach, $\mathcal{F} : X \to Y$ une application différentiable et $f \in Y$. Nous cherchons à résoudre l'équation :

$$\mathcal{F}(u) = f. \tag{1.1}$$

En dimension finie, supposons que $X = Y = \mathbb{R}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, si $\mathcal{F}$ est une application linéaire, on peut lui associer une matrice $F$ dans $M_n(\mathbb{R})$. L'équation $Fu = f$, avec $f \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, admet une solution si $F \in GL_n(\mathbb{R})$, et on a $u = F^{-1}f$.
Pour des applications non linéaires, nous connaissons des techniques classiques comme l'itération de Picard et la méthode de Newton, pour la résolution des équations sur les espaces vectoriels normés $\mathbb{R}^n$.

Nous nous intéressons maintenant à la résolution du problème en dimension infinie. Les principaux domaines d'application étant (d'après [Secchi 2016]) la résolution d'équations aux dérivées partielles et de problèmes de perturbations physiques, nous supposons que $f$ est une « petite perturbation ». Toutes ces méthodes font appel à une linéarisation du problème, en définissant une suite définie en fonction de la différentielle $d\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$, et qui tend vers la solution cherchée.

## 1 L'inversion locale et l'itération de Picard

**Définition 1.1**

Un espace de Banach $X$ est un espace vectoriel normé complet. C'est-à-dire que toute suite de Cauchy de $X$ converge dans $X$.

**Définition 1.2**

Soient $X$ et $Y$ des espaces de Banach, alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est l'ensemble des applications linéaires continues de $X$ dans $Y$, et $\mathrm{Isom}(X, Y)$ est l'ensemble des applications linéaires continues et bijectives de $X$ dans $Y$. Un élément de $\mathrm{Isom}(X, Y)$ est appelé un isomorphisme de $X$ dans $Y$.

**Proposition 1.1**

Soit $X$ un espace de Banach. Supposons $S \in \mathcal{L}(X)$, avec $\|S\| < 1$. Alors $(\mathrm{Id}_X - S)$ est inversible et d'inverse $\sum\limits_{k \geqslant 0} S^k$. De plus, la série converge normalement.

**Démonstration :**

- On remarque premièrement que $\sum\limits_{k\geqslant 0} \|S^k\| \leqslant \sum\limits_{k\geqslant 0} \|S\|^k$. Comme $\|S\| < 1$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \|S\|^k$ converge donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} S^k$ converge normalement.
- De plus, $X$ étant complet, $\mathcal{L}(X)$ l'est aussi et toute série normalement convergente de $\mathcal{L}(X)$ est convergente.

Donc $\sum\limits_{k\geqslant 0} S^k$ est convergente dans $\mathcal{L}(X)$, c'est à dire $\sum\limits_{k\geqslant 0} S^k \in \mathcal{L}(X)$. On a, par continuité de $S$,

$$(\mathrm{Id}_X - S)\sum_{k\geqslant 0} S^k = \sum_{k\geqslant 0} S^k - \sum_{k\geqslant 0} S^{k+1} = \mathrm{Id}_X$$
$$\text{et} \sum_{k\geqslant 0} S^k\,(\mathrm{Id}_X - S) = \sum_{k\geqslant 0} S^k - \sum_{k\geqslant 0} S^{k+1} = \mathrm{Id}_X.$$

Donc $(\mathrm{Id}_X - S)$ est inversible, d'inverse $\sum\limits_{k\geqslant 0} S^k$. ■

**Proposition 1.2**

Si $X$ et $Y$ sont des espaces de Banach, alors $\mathrm{Isom}(X,Y)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(X,Y)$.

**Démonstration :** Si $\mathrm{Isom}(X,Y) = \varnothing$, alors $\mathrm{Isom}(X,Y)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(X,Y)$ (car $\varnothing$ est un ouvert). Supposons $\mathrm{Isom}(X,Y) \neq \varnothing$. Soit $T_0 \in \mathrm{Isom}(X,Y)$ et soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On a

$$T = T_0 - (T_0 - T) = T_0(\mathrm{Id}_X - T_0^{-1}(T_0 - T)).$$

Posons $S = T_0^{-1}(T_0 - T)$. On a donc $\|S\| = \left\|T_0^{-1}(T_0 - T)\right\| \leqslant \left\|T_0^{-1}\right\| \|T_0 - T\|$. Si $\|T_0 - T\| < \frac{1}{\left\|T_0^{-1}\right\|} = \varepsilon$, alors $\|S\| < 1$. Dans ce cas, comme $S \in \mathcal{L}(X)$, d'après la proposition 1.1, $(\mathrm{Id}_X - S)$ est inversible. D'où $T = T_0(\mathrm{Id}_X - S)$ est inversible. Ainsi, si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ avec $\|T - T_0\| < \varepsilon$, alors $T \in \mathrm{Isom}(X,Y)$, donc $B_{\mathcal{L}(X,Y)}(T_0,\varepsilon) \subseteq \mathrm{Isom}(X,Y)$. $\mathrm{Isom}(X,Y)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(X,Y)$. ■

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème d'inversion locale sur les espaces de Banach.

**Théorème 1.1 (*Inversion locale*)**

Soient $X$, $Y$ des espaces de Banach et soit $U$ un ouvert non vide de $X$. Posons $\mathcal{F} : U \to Y \in \mathcal{C}^1(U)$. Soit $u_0 \in U$. S'il existe $\Psi \in \mathcal{L}(Y,X)$ tel que $d\mathcal{F}(u_0)\Psi = \mathrm{Id}_Y$, alors il existe un voisinage $V$ de $\mathcal{F}(u_0)$ et une application $\mathcal{G} \in \mathcal{C}^1(V)$, tel que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \mathrm{Id}_Y$.
De plus, si $d\mathcal{F}(u_0) \in \mathrm{Isom}(X,Y)$, alors $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage de $u_0$ sur un voisinage de $\mathcal{F}(u_0)$.

**Démonstration :** On note $f = \mathcal{F}(u)$ et $f_0 = \mathcal{F}(u_0)$.

**Etape 1** Supposons dans un premier temps que $X = Y, \mathcal{F}(u) = u$ et $d\mathcal{F}(u) = \mathrm{Id}_X$. On réécrit alors $f = \mathcal{F}(u)$ sous la forme $u = u + f - \mathcal{F}(u)$. Posons $\mathcal{H}(u) \stackrel{\text{def}}{=} u + f - \mathcal{F}(u)$. Nous cherchons alors un point fixe de $\mathcal{H}$ comme limite de la suite $(u_n)_n$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathcal{H}(u_n)$.

i. Pour un $\delta > 0$ assez petit et $\|f - u_0\| \leqslant \frac{\delta}{2}$, on a $\mathcal{H}\left(\overline{B(u_0,\delta)}\right) \subseteq \overline{B(u_0,\delta)}$. En effet, d'après la formule de Taylor à l'ordre 1, on a

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u_0) + d\mathcal{F}(u_0)(u - u_0) + \mathrm{o}(u - u_0) = \mathcal{F}(u_0) + (u - u_0) + o(u - u_0) = u + \mathrm{o}(u - u_0)$$
$$\Longrightarrow \mathcal{H}(u) - u_0 = f - u_0 + \mathrm{o}(u - u_0) \Rightarrow \|\mathcal{H}(u) - u_0\| \leqslant \delta(\frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)) \leqslant \delta.$$

ii. Si $\|f - u_0\| \leqslant \frac{\delta}{2}$ avec $\delta$ assez petit, alors $\mathcal{H}$ est contractante dans $\overline{B(u_0,\delta)}$, car :

$$\forall\, u', u'' \in \overline{B(u_0,\delta)},\ \left\|\mathcal{H}(u') - \mathcal{H}(u'')\right\| \leqslant \left\|u' - u''\right\| \sup_{\|z - u_0\| \leqslant \delta} \|\mathrm{Id}_X - d\mathcal{F}(z)\| \leqslant \frac{1}{2}\left\|u' - u''\right\|.$$

D'après le théorème du point fixe de Banach, $\mathcal{H}$ possède un unique point fixe dans $\overline{B(u_0,\delta)}$. Donc $\forall\, f \in B(u_0,\frac{\delta}{2})$, $\mathcal{F}(u) = f$ possède une unique solution dans $\overline{B(u_0,\delta)}$. Puisque $\delta$ peut être pris arbitrairement petit, nous en déduisons que l'image par $\mathcal{F}$ de tout voisinage de $u_0$ est un voisinage de $u_0$.

**Etape 2** Passons au cas général. Soit $u_0 \in X$, on pose $\tilde{\mathcal{F}} : Y \to Y$ tel que $\forall f \in Y, \tilde{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}(u_0 + \Psi(f - f_0))$. En appliquant l'étape 1 à $\tilde{\mathcal{F}}$ , nous avons que l'image par $\mathcal{F}$ de tout voisinage de $u_0$ est un voisinage de $\mathcal{F}(u_0)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $V \stackrel{\text{def}}{=} B(f_0, \varepsilon)$ tel que $\sup_{f \in V} \left\| \mathrm{Id}_Y - d\tilde{\mathcal{F}}(f) \right\| < 1$. Alors, par le lemme 1.1, pour tout $f \in V$, $d\tilde{\mathcal{F}}(f)$ est inversible. On applique alors la première partie de la preuve à $V$ et $\tilde{\mathcal{F}}$, on en conclut que l'image par $\tilde{\mathcal{F}}$ de tout ouvert de $V$ est un ouvert. $\tilde{\mathcal{F}}$ est une injection sur $V$ ; de plus, par la formule de Taylor utilisée à l'étape 1, $\tilde{\mathcal{F}}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $V$ sur $\tilde{\mathcal{F}}(V)$. Si on note $\tilde{\mathcal{G}}$ ce difféomorphisme, l'application $\mathcal{G} : Y \to X$ définie par $\mathcal{G}(f) = u_0 + \Psi(\tilde{\mathcal{G}}(f) - f_0)$ fournit l'application $\mathcal{G}$ voulue.

**Etape 3** Si $d\mathcal{F}(u_0) \in \mathrm{Isom}(X, Y)$ alors, $A$ est inversible et d'après l'étape 2, $\mathcal{F}(u) = \tilde{\mathcal{F}}(u_0 + \Psi^{-1}(\mathcal{F}(u) - f_0))$ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage de $u_0$ sur un voisinage de $\mathcal{F}(u_0)$. ∎

Le théorème d'inversion locale est un outil que l'on peut utiliser dans la résolution de notre problème. Si la différentielle en $u_0$, $d\mathcal{F}(u_0)$, est un isomorphisme de $X$ dans $Y$, le théorème d'inversion locale fournit une unique solution $u \in X$ proche de $u_0$. Elle peut être obtenue par l'itération de Picard :

$$\boxed{u_{k+1} = u_k + d\mathcal{F}(u_0)^{-1}(f - \mathcal{F}(u_k))} \tag{I}$$

**Théorème 1.2 (*Itération de Picard*)**

Soient $X$ et $Y$ des espaces de Banach et $U$ un ouvert non vide de $X$. Posons $\mathcal{F} : U \to Y \in \mathcal{C}^1(U)$. Soit $u_0 \in U$ tel que $d\mathcal{F}(u_0)$ est un isomorphisme de $U$ dans $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$. Alors il existe un voisinage $U'$ de $u_0$ et un voisinage $V$ de $\mathcal{F}(u_0)$ tel que

$$\forall f \in V, \exists!\, u^\star \in U', \quad \mathcal{F}(u^\star) = f \quad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} u_k = u^\star,$$

avec $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = u_k + d\mathcal{F}(u_0)^{-1} (f - \mathcal{F}(u_k))$.

**Démonstration :** On remarque premièrement par le théorème 1.1 que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomrphisme d'un voisinage $U'$ de $u_0$ dans un voisinage $V$ de $\mathcal{F}(u_0)$. Soit $f \in V$. Par définition, $\exists!\, u^\star \in U'$ tel que $\mathcal{F}(u^\star) = f$. De plus, comme $d\mathcal{F}(u_0)$ est un isomorphisme, alors $d\mathcal{F}^{-1}(u_0)$ est bien définie par le théorème 1.1. Il nous reste à calculer la limite de la suite $(u_k)_k$.

**Etape 1** La suite $(u_k)_k$ converge car l'application $u \mapsto u + d\mathcal{F}(u_0)^{-1}(f - \mathcal{F}(u))$ possède un unique point fixe par l'Etape 1 et l'Etape 2 de la preuve précédente.

**Etape 2** Montrons enfin que $\lim_{k \to +\infty} u_k = u^\star$. Il existe un $l \in U'$ tel que $\lim_{k \to +\infty} u_k = l$. Alors,

$$\lim_{k \to +\infty} u_{k+1} = \lim_{k \to +\infty} \left( u_k + d\mathcal{F}(u_0)^{-1}(f - \mathcal{F}(u_k)) \right).$$

Mais $d\mathcal{F}(u_0)^{-1}$ est continue, donc $d\mathcal{F}(u_0)^{-1}(f - \mathcal{F}(l)) = 0$. Puis en composant par $d\mathcal{F}(u_0)$ des deux côtés,

$$f - \mathcal{F}(l) = 0 \Longrightarrow \mathcal{F}(l) = f = \mathcal{F}(u^\star).$$

Or $\mathcal{F}$ est bijective de $U'$ dans $V$, donc $l = u^\star$. ∎

**Remarque 1**

Ce schéma itératif possède une convergence géométrique ($O(\varepsilon^k)$). En effet, $\|u_{k+1} - u_k\| \leqslant \varepsilon \|u_k - u_{k-1}\|$ pour un certain $\varepsilon \in ]0, 1[$. Donc $\|u^\star - u_k\| = O(\varepsilon^k)$ avec $\lim_{k \to +\infty} u_k = u^\star$.

En remplaçant $u_0$ dans (I) par l'itéré précédent $u_k$, on étudie une méthode de résolution du problème avec une meilleure convergence.

## 2 La méthode de Newton sur les espaces de Banach

Soit $\mathcal{F} : X \to Y$ avec $X, Y$ des espaces de Banach. On veut résoudre l'équation $\mathcal{F}(u) = f$. Supposons que $\mathcal{F}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $d\mathcal{F}$ inversible sur un voisinage de u. Une méthode pour résoudre une telle équation est la méthode de Newton qui utilise l'itération suivante :

$$\boxed{u_{k+1} = u_k + d\mathcal{F}(u_k)^{-1}(f - \mathcal{F}(u_k))} \tag{II}$$

Contrairement à l'itération de Picard, nous devons ici résoudre une équation différente à chaque étape, induite par la différentielle $d\mathcal{F}(u_n)$. De plus cette méthode possède une convergence quadratique ($O(\varepsilon^{2^k})$) qui est plus satisfaisante que la convergence géométrique ($O(\varepsilon^k)$) de l'itération de Picard.

**Théorème 1.3 (*Méthode de Newton*)**

Soient $X$ et $Y$ des espaces de Banach, $u \in X$, $\delta > 0$ et soit $\mathcal{F} : B(u, \delta) \to Y$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, u, v \in X, \|d\mathcal{F}(u) - d\mathcal{F}(v)\| \leqslant M \|u - v\|$.
On suppose de plus qu'il existe $u_0 \in B(u, \delta)$ tel que $d\mathcal{F}(u_0) : X \to Y$ est un isomorphisme avec $\|\mathcal{F}(u_0) - f\|$ assez petit.

$$\exists!\, u^\star \in U', \quad \mathcal{F}(u^\star) = f \quad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} u_k = u^\star,$$

avec $\forall\, k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = u_k + d\mathcal{F}(u_k)^{-1}(f - \mathcal{F}(u_k))$. De plus, $\|f - \mathcal{F}(u_k)\| = O(\varepsilon^{2^k})$ (pour $0 < \varepsilon < 1$).

**Lemme 1.1 (*admis*)**

Soit $U$ un ouvert connexe contenu dans un espace vectoriel normé $X$. Soit $\mathcal{F} : U \to V$ avec $V$ un sous-espace vectoriel de $X$. Alors,

$$\forall\, a, b, c \in U, \|\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) - d\mathcal{F}(c)(b - a)\| \leqslant \sup_{u \in U} \|d\mathcal{F}(u) - d\mathcal{F}(c)\| \|b - a\|.$$

**Démonstration du Théorème :** Soit $u_0 \in B(u, \delta)$. On pose $f_0 = \mathcal{F}(u_0)$. On veut alors résoudre l'équation en $t$ suivante :

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(u_0 + t) = f \\ ie. \quad &\mathcal{F}(u_0 + t) - \mathcal{F}(u_0) = f - f_0. \end{aligned}$$

**Étape 1** Supposons que $u_0 + t \in B(u, \delta)$ alors en faisant un développement de Taylor à l'ordre 1, $t$ doit vérifier :

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(u_0 + t) = \mathcal{F}(u_0) + d\mathcal{F}(u_0 + t)(t) + R(u_0, t) \qquad (1.2) \\ ie. \quad &f - f_0 = d\mathcal{F}(u_0 + t)(t) + R(u_0, t). \end{aligned}$$

où $R$ est le reste de l'approximation de Taylor. De plus, $d\mathcal{F}$ est continue et $d\mathcal{F}(u_0)$ est un isomorphisme donc $d\mathcal{F}(u_0 + t)$ est un isomorphisme, d'après la proposition 1.2. On peut donc inverser $d\mathcal{F}(u_0 + t)$ localement :

$$t = d\mathcal{F}(u_0 + t)^{-1}(f - f_0 - R(u_0, t)).$$

On pose alors $\phi : B(u, \delta) \to Y$ tel que pour tout $r \in B(u, \delta)$, $\phi(r) = -d\mathcal{F}(u_0 + r)^{-1}(-f + f_0 + R(u_0, r))$.

**Étape 2** Montrons qu'il existe $\delta' \in ]0, \delta[$ tel que $\phi$ est une contraction de la boule $B(u_0, \delta')$ dans $B(u_0, \delta')$.
Soit $\mathcal{G}(r) = d\mathcal{F}(u_0 + r)^{-1}$, d'après les hypothèses du théorème :

$$\left\|\mathcal{G}(r)^{-1} - \mathcal{G}(r')^{-1}\right\| \leqslant M \left\|r - r'\right\|.$$

En appliquant l'identité $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B-A)B^{-1}$ entre isomorphismes linéaires, on obtient :

$$\left\|\mathcal{G}(r) - \mathcal{G}(r')\right\| \leqslant M \left\|r - r'\right\| \cdot \|\mathcal{G}(r)\| \cdot \left\|\mathcal{G}(r')\right\|. \tag{1.3}$$

On pose $C = \|\mathcal{G}(0)\|$. Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}(r)\| = \|\mathcal{G}(r) - \mathcal{G}(0) + \mathcal{G}(0)\| &\leqslant \|\mathcal{G}(r) - \mathcal{G}(0)\| + \|\mathcal{G}(0)\| \leqslant M\|r-0\| \cdot \|\mathcal{G}(r)\| \cdot \|\mathcal{G}(0)\| + \|\mathcal{G}(0)\| \\ &\leqslant CM\|r\| \cdot \|\mathcal{G}(r)\| + C.\end{aligned}$$

On trouve donc la majoration

$$\|\mathcal{G}(r)\| \leqslant \frac{C}{1 - CM\|r\|}. \tag{1.4}$$

$\mathcal{G}(r)$ est bien défini pour $\|r\| \leqslant \delta' < \delta$ et $\|r\| \leqslant (2CM)^{-1}$. De plus, cette hypothèse $\|r\| \leqslant (2CM)^{-1}$ implique $(1 - CM\|r\|)^{-1} \leqslant 2$. Grâce à la majoration (1.4), on obtient la majoration :

$$\|\mathcal{G}(r)\| \leqslant 2C.$$

Si $r, r' \in B(u_0, \delta')$, on a

$$\begin{aligned}\left\|\phi(r) - \phi(r')\right\| &= \left\|-\mathcal{G}(r)(-f + f_0 + R(u_0, r)) + \mathcal{G}(r')(-f + f_0 + R(u_0, r'))\right\| \\ &= \left\|-\mathcal{G}(r)(-f + f_0 + R(u_0, r) + R(u_0, r') - R(u_0, r')) + \mathcal{G}(r')(-f + f_0 + R(u_0, r'))\right\| \\ &= \left\|\mathcal{G}(r)\left(R(u_0, r') - R(u_0, r)\right) + \left(\mathcal{G}(r') - \mathcal{G}(r)\right)\left(-f + f_0 + R(u_0, r')\right)\right\| \\ &\leqslant \|\mathcal{G}(r)\| \cdot \left\|R(u_0, r') - R(u_0, r)\right\| + \left\|\mathcal{G}(r) - \mathcal{G}(r')\right\| \cdot \left\|f_0 + R(u_0, r') - f\right\|.\end{aligned}$$

Or d'après le lemme 1.1 et l'hypothèse, à partir du développement de Taylor (1.2), on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|R(u_0, r') - R(u_0, r)\right\| &= \left\|\mathcal{F}(u_0 + r') - \mathcal{F}(u_0 + r) + d\mathcal{F}(u_0 + r)(r) - d\mathcal{F}(u_0 + r')(r')\right\| \\ &\leqslant \left\|\mathcal{F}(u_0 + r') - \mathcal{F}(u_0 + r) - d\mathcal{F}(u_0 + r)(r' - r)\right\| + \left\|d\mathcal{F}(u_0 + r)(r') - d\mathcal{F}(u_0 + r')(r')\right\| \\ &\leqslant M\left(\left\|r' - r\right\|^2 + \left\|r'\right\| \cdot \left\|r' - r\right\|\right).\end{aligned}$$

De plus, d'après la majoration (1.3) et celle ci-dessus (avec $r = 0$), on obtient une troisième majoration :

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{G}(r) - \mathcal{G}(r')\right\| \cdot \left\|f_0 + R(u_0, r') - f\right\| &\leqslant 4C^2 M \left\|r - r'\right\| \cdot \left\|f_0 + R(u_0, r') - f\right\| \\ &\leqslant 4C^2 M \left\|r - r'\right\| \left(\|f_0 - f\| + 2M\left\|r'\right\|^2\right).\end{aligned}$$

Les majorations précédentes nous donnent finalement

$$\left\|\phi(r) - \phi(r')\right\| \leqslant \underbrace{\left(2CM\left(\left\|r' - r\right\| + \left\|r'\right\|\right) + 4C^2 M(\|f_0 - f\| + 2M\left\|r'\right\|^2)\right)}_{\stackrel{\text{def}}{=}\ K} \left\|r' - r\right\|.$$

Comme $r, r' \in B(u_0, \delta')$, on peut alors majorer $K$ par $2CM(3\delta') + 4C^2 M(\|f_0 - f\| + 2M\delta'^2)$. Prenons $\|f_0 - f\|$ assez petit, de telle sorte que $\|f_0 - f\| < (4C^2 M)^{-1}$, alors $K_0 \stackrel{\text{def}}{=} 4C^2 M \|f_0 - f\| < 1$. Nous avons donc $K \leqslant (6CM + 8C^2 M^2 \delta')\delta' + K_0$. On peut choisir un $\delta'$ suffisamment petit afin d'avoir $K < 1$. Alors, $\phi$ est contractante et :

$$\|\phi(r)\| \leqslant \|\phi(r) - \phi(0)\| + \|\phi(0)\| \leqslant K\|r\| + C\|f_0 - f\|.$$

Donc si $C\|f_0 - f\| \leqslant (1 - K)\delta'$ alors $\|\phi(r)\| \leqslant \delta'$.

**Étape 3** D'après le théorème du point fixe de Banach, $\phi$ possède un unique point fixe $t$ dans $B(u_0, \delta')$ qui est la limite de la suite définie par $t_0 = 0$ et $t_{k+1} = t_k + d\mathcal{F}(u_0 + t_k)^{-1}(f - \mathcal{F}(u_0 + t_k))$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}t_{k+1} = \phi(t_k) &= -d\mathcal{F}(u_0 + t_k)^{-1}(-f + f_0 + R(u_0, t_k)) \\ &= -d\mathcal{F}(u_0 + t_k)^{-1}(\mathcal{F}(u_0 + t_k) - d\mathcal{F}(u_0 + t_k)(t_k) - f) \\ &= t_k - d\mathcal{F}(u_0 + t_k)^{-1}(\mathcal{F}(u_0 + t_k) - f) \\ &= t_k + d\mathcal{F}(u_0 + t_k)^{-1}(f - \mathcal{F}(u_0 + t_k)).\end{aligned}$$

On a donc prouvé ici que la suite définie par $u_k = u_0 + t_k$ converge vers $u_0 + t = u^\star$. Le schéma itératif $u_{k+1} = u_k + d\mathcal{F}(u_k)^{-1}(f - \mathcal{F}(u_k))$ converge vers $u^\star$, la solution cherchée.

**Convergence quadratique** Montrons enfin la convergence quadratique de la méthode de Newton. On veut montrer $\|f - \mathcal{F}(u_k)\| = O(\varepsilon^{2^k})$ avec $0 < \varepsilon < 1$. L'itération de la méthode de Newton peut être réécrite comme suit :

$$d\mathcal{F}(u_k)(u_{k+1} - u_k) + \mathcal{F}(u_k) = f.$$

On a

$$\|f - \mathcal{F}(u_{k+1})\| = \|d\mathcal{F}(u_k)(u_{k+1} - u_k) + \mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u_{k+1})\| = \|\mathcal{F}(u_{k+1}) - d\mathcal{F}(u_k)(u_{k+1} - u_k) - \mathcal{F}(u_k)\|.$$

D'après le lemme 1.1, on a

$$\|f - \mathcal{F}(u_{k+1})\| \leqslant M \|u_{k+1} - u_k\|^2.$$

D'autre part,

$$\|u_{k+1} - u_k\| = \left\|d\mathcal{F}(u_k)^{-1}(f - \mathcal{F}(u_k))\right\| \leqslant \left\|d\mathcal{F}(u_k)^{-1}\right\| \|f - \mathcal{F}(u_k)\| \leqslant D \|f - \mathcal{F}(u_k)\|,$$

avec $D$ une constante positive telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left\|d\mathcal{F}(u_k)^{-1}\right\| \leqslant D$.
On a alors

$$\|f - \mathcal{F}(u_{k+1})\| \leqslant MD^2 \|f - \mathcal{F}(u_k)\|^2,$$

ce qui implique

$$\|f - \mathcal{F}(u_k)\| \leqslant (MD^2 \|f - \mathcal{F}(u_0)\|)^{2^k} = (MD^2 \|f\|)^{2^k} \leqslant (MD^2\varepsilon)^{2^k},$$

pour un certain $\varepsilon \in ]0,1[$. Ainsi, $\|f - \mathcal{F}(u_k)\| = O(\varepsilon^{2^k})$. ∎

## 3 Les limites de ces méthodes

Revenons au problème initial, de résolution d'équations de perturbations en dimension infinie, de type

$$\mathcal{F}(u) = f, \tag{1.1}$$

où $\mathcal{F} : X \to Y$ est un opérateur $\mathcal{C}^1$, $f \in Y$ une « petite perturbation » (dans le sens où $\|f\|_Y$ est assez petit). Sans perte de généralité, écrivons $\mathcal{F}(0) = 0$. Écrivons l'équation linéarisée associée à notre problème initial :

$$d\mathcal{F}(u)v = g. \tag{1.5}$$

Les méthodes précédentes ont pour point commun l'hypothèse que $d\mathcal{F}$ soit inversible, donnant donc une estimation de la solution :

$$\|v\|_X \leqslant C \|g\|_Y.$$

Mais, gardant en tête que la plupart des applications considérées sont des opérateurs avec des dérivées partielles, il existe de nombreuses situations dans lesquelles nous n'avons pas cette hypothèse d'inversibilité de l'opérateur.

Si $d\mathcal{F}$ n'est pas inversible sur un voisinage de $u_0$, la méthode de Newton ne peut être appliquée. Le point crucial de ces méthodes itératives est que les inverses de différentielles sont des applications linéaires continues de $Y$ dans $X$. Cependant, pour de nombreux problèmes notamment de résolution d'équations aux dérivées partielles, ce n'est pas le cas.

**Exemple 1**

Un exemple (tiré de [Gérard-Varet 2019]) consiste en l'opérateur $\mathcal{F}$ suivant :

$$\mathcal{F}(u) = \partial_t u + \partial_x u + u\partial_x u,$$

où $u = u(t,x)$ avec $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}$. On considère $\mathcal{F}$ comme prenant des fonctions $u$ dans l'ensemble $X = \{u \in C_b^2([0,T] \times \mathbb{R}), u_{|t=0} = 0\}$, et à valeurs dans $Y = C_b^1([0,T] \times \mathbb{R})$, où $C_b^k([0,T] \times \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions $C^k$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre $k$ sont continues et bornées, de norme :

$$\|u\|_{C_b^2} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha| \leqslant k}} \sup_{\substack{t \in [0,T] \\ x \in \mathbb{R}}} |\partial^\alpha u| < +\infty.$$

Comme $\mathcal{F}(u+h) = \mathcal{F}(u) + \partial_t h + \partial_x h + u\partial_x h + h\partial_x u + h\partial_x h$, la différentielle de $\mathcal{F}$ en 0 est une application linéaire donnée par $d\mathcal{F}(0)(v) = \partial_t v + \partial_x v$, qui définit un opérateur linéaire continu de $X$ dans $Y$. C'est une équation de transport ; pour tout $g \in Y$, on constate que :

$$v(t,x) = \int_0^t g(s, x-(t-s))\mathrm{d}s,$$

est l'unique solution dans $Y$ satisfaisant la condition initiale $v_{|t=0} = 0$. On note $d\mathcal{F}(0)^{-1}$ l'application $f \mapsto v$. Par le théorème fondamental de l'intégration, on sait que l'application est deux fois différentiable en $t$, mais il n'y a pas d'information supplémentaire sur la régularité en $x$. On ne peut donc légitimement envoyer $d\mathcal{F}(0)^{-1}$ dans $X$. On a perdu de l'information sur une dérivée (elle existe possiblement, mais nous ne le savons pas).

Ce phénomène de *pertes de dérivées* fait notamment sens dans une famille d'espaces de Banach imbriqués, telle que définie ci-dessous.

Considérons deux suites décroissantes de Banach $X_0 \supset \cdots \supset X_m \supset \ldots$, et $Y_0 \supset \cdots \supset Y_m \supset \ldots$, de normes croissantes $\|\cdot\|_{X_m}$ et $\|\cdot\|_{Y_m}$ (pour $m \geqslant 0$), comme les espaces de Sobolev *.

On suppose désormais que $\mathcal{F}$ est défini de $X_m$ sur $Y_m$ pour tous les $m \geqslant 0$. Supposons qu'on dispose d'une solution $v$ de l'équation 1.5 (*ie.* $v = \mathcal{G}(u)g$), vérifiant pour un $u$ fixé, une estimation de la forme

$$\|v\|_{X_m} \leqslant C \|g\|_{Y_{m+s}},$$

et ce pour tout $m$ dans un intervalle fini. On dit alors que la résolution de l'équation se fait avec *perte de s dérivées*, c'est-à-dire qu'entre deux itérations de Newton, on perd les informations sur $s$ dérivées. En effet, en appliquant la méthode de Newton à ce problème, on obtient :

$$\begin{aligned} &u_k \in X_m, \\ &u_{k+1} = u_k + (d\mathcal{F}(u_k))^{-1} \underbrace{(f - \mathcal{F}(u_k))}_{\in Y_m} \in X_{m-s}, \end{aligned}$$

*. Les espaces de Sobolev, $H^m$ avec $m$ entier, sont les espaces de fonctions dans $L^2$ dont les dérivées partielles (au sens des distributions) de longueur de multi-indice inférieur à $m$ sont dans $L^2$ :

$$\forall\, \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n, H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leqslant m, D^\alpha f \in L^2(\Omega)\}$$

En particulier, ce sont des espaces de Hilbert, de norme $\langle f, g\rangle_m = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g\rangle$.

car d'un élément de $Y_m$ on ne peut obtenir qu'un élément dont on connaît la majoration dans $X_{m-s}$ seulement. Cela revient à dire que $d\mathcal{F}(\cdot)$ n'est inversible que de $Y_m$ dans $X_{m-s}$, où on perd donc les informations sur le caractère inversible, pour $s$ espaces. La perte de régularité est fixe : au bout d'un certain nombre d'itérations, on a perdu toute information sur la régularité de $u_k$, et on ne peut plus réitérer.

De plus, cette perte $s$ se double d'une perte $s'$ due au « coût » de la résolution de 1.5 en information sur $u_k$. En effet, dans la méthode de Newton, $u_k$ qui aurait une perte supplémentaire est utilisé dans le calcul de $u_{k+1}$. Supposons, par exemple, que la solution $v$ vérifie une estimation de la forme

$$\|v\|_{X_m} \leqslant C\left(\|g\|_{Y_{m+s}} + \|g\|_{Y_0}\left(1 + \|u\|_{X_{m+s'}}\right)\right),$$

et ce pour tout $m$ dans un intervalle fini. Alors cette perte $s'$ se retrouve à l'itération suivante dans l'opérateur $d\mathcal{F}(u_k)^{-1}$, se cumulant avec la perte $s$.

On se retrouve ainsi avec une double « perte de dérivées » : celle due à l'opérateur $d\mathcal{F}(\cdot)$, ainsi que celle due à la résolution de l'équation linéarisée sur $u$. *

Cependant, il existe une méthode permettant de compenser ce phénomène de perte de dérivées et ainsi continuer les itérations du schéma pour converger vers la solution. Nous allons expliquer cette méthode et la démontrer dans les parties suivantes.

*. Il est à noter que cette perte de dérivées dépend des échelles de Banach choisies. On peut donc se retrouver dans une situation où un autre choix d'échelles de Banach est plus satisfaisant, voire ne nécessite que l'usage de la méthode de Newton. [Alinhac et Gérard 1991]

# 2. Le théorème de Nash-Moser

## 1 La méthode de Nash-Moser-Hörmander

L'idée de Nash est d'introduire des opérateurs de régularisation qui permettent de compenser, à chaque itération de la méthode, la perte de dérivées prévue.

Moyennant des *estimations douces* sur la perte de dérivées, le théorème prouvé par Nash puis amélioré par Moser et Hörmander consiste en une modification de l'itération de Newton où on introduit à chaque étape un opérateur de régularisation qui compense cette double perte de dérivées.

On introduit des opérateurs de régularisation $S_X(\theta) : X_0 \to X_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{m \geqslant 0} X_m$ avec $\lim_{\theta \to \infty} S_X(\theta) = \mathrm{Id}_X$, et $S_Y(\theta) : Y_0 \to Y_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{m \geqslant 0} Y_m$ avec $\lim_{\theta \to \infty} S_Y(\theta) = \mathrm{Id}_Y$.

L'itération de Nash-Moser se définit alors comme suit :

$$\boxed{u_{k+1} = u_k + (d\mathcal{F}(S_X(\theta_k)u_k))^{-1} S_Y(\theta_k)(f - \mathcal{F}(u_k))} \tag{III}$$

avec $u_0 = 0$ et $(\theta_k)_{k \geqslant 1}$ une suite qui tend vers l'infini. Comme $S_X(\theta_k) \to \mathrm{Id}_X$ et $S_Y(\theta_k) \to \mathrm{Id}_Y$ lorsque $k$ tend vers l'infini, cette méthode *tend* vers celle de Newton, dans un certain sens. On peut donc s'attendre à ce que cette méthode converge vers une solution, zéro de la fonction voulue, si la méthode réussit à compenser la perte de dérivées. C'est justement la convergence quadratique de la méthode de Newton qui permet de compenser la perte de dérivées, et permet à cette méthode de converger vers la solution souhaitée.

## 2 Énoncé du théorème

Soient $(X_m)_{m \geqslant 0}$ et $(Y_m)_{m \geqslant 0}$ deux suites d'espaces de Banach décroissantes au sens de l'inclusion et de normes croissantes. On note $X_\infty = \bigcap_{m \geqslant 0} X_m$, et $Y_\infty = \bigcap_{m \geqslant 0} Y_m$.

On définit des « opérateurs de régularisation » sur les familles d'espaces de Banach.

**Définition 2.1 (*opérateurs de régularisation*)**

La suite d'espaces de Banach $(X_m)_{m \geqslant 0}$ satisfait une *hypothèse régularisante* s'il existe une famille d'opérateurs de régularisation $\{S_\theta\}_{\theta \geqslant 1}$, où $S_\theta$ est défini de $X_0$ dans $X_\infty$, vérifiant les inégalités :

$$\|S_\theta u\|_{X_\beta} \leqslant C\theta^{(\beta-\alpha)_+} \|u\|_{X_\alpha} \qquad \forall\, \alpha, \beta \geqslant 0, \tag{2.1}$$

$$\|S_\theta u - u\|_{X_\beta} \leqslant C\theta^{\beta-\alpha} \|u\|_{X_\alpha} \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant \alpha, \tag{2.2}$$

$$\left\| \frac{d}{d\theta} S_\theta u \right\|_{X_\beta} \leqslant C\theta^{\beta-\alpha-1} \|u\|_{X_\alpha} \qquad \forall\, \alpha, \beta \geqslant 0, \tag{2.3}$$

où on a noté $(\beta - \alpha)_+ \stackrel{\text{def}}{=} \max(0, \beta - \alpha)$. Les constantes $C$ sont uniformes par rapport à $\alpha$ et $\beta$ dans un intervalle.

Dans la suite décroissante d'espaces de Banach $(Y_m)_{m\geqslant 0}$, on introduit similairement l'opérateur $S_Y(\theta) : Y_0 \to Y_\infty$. On notera également $S_Y(\theta) = S_\theta$.

Le théorème de Nash-Moser requiert les deux hypothèses suivantes sur les familles d'espaces de Banach et sur $\mathcal{F}$.

**Hypothèse 1**

Soit $U$ un voisinage ouvert borné de 0 dans $X_0$. On suppose que pour tout $u \in U \cap X_\infty$, pour tout $m \geqslant 0$, la fonction $\mathcal{F} : X_m \mapsto Y_m$ est deux fois différentiable. De plus, la différentielle seconde satisfait une « estimation douce » sur sa norme :

$$\left\|d^2\mathcal{F}(u)(v_1, v_2)\right\|_{Y_m} \leqslant C \left(\|v_1\|_{X_{m+1}} \|v_2\|_{X_0} + \|v_1\|_{X_0} \|v_2\|_{X_{m+1}} + \|v_1\|_{X_0} \|v_2\|_{X_0} \left(1 + \|u\|_{X_{m+1}}\right)\right), \tag{2.4}$$

pour tout $m \geqslant 0$, et pour tout $v_1, v_2 \in X_\infty$. La constante $C$ est bornée, pour $m$ borné.

**Hypothèse 2**

Soit $U$ un voisinage de 0 dans $X_0$, ouvert borné. On suppose que pour tout $u \in U \cap X_\infty$ il existe une application linéaire $\Psi(u) : Y_\infty \mapsto X_\infty$ tel que $d\mathcal{F}(u)\Psi(u) = \mathrm{Id}$, et que cet inverse local de la différentielle satisfait une « estimation douce sur sa norme » :

$$\|\Psi(u)g\|_{X_m} \leqslant C(\|g\|_{Y_{m+1}} + \|g\|_{Y_0} \|u\|_{Y_{m+1}}), \tag{2.5}$$

pour tout $m \geqslant 0$. La constante $C$ est bornée, pour $m$ borné.

On peut finalement énoncer le théorème de Nash-Moser :

**Théorème *(Nash-Moser)***

Soient $(X_m)_{m\geqslant 0}$ et $(Y_m)_{m\geqslant 0}$ deux suites d'espaces de Banach décroissantes satisfaisant l'hypothèse de régularisation, et supposons vraies les deux hypothèses 1 et 2. Pour tout $m' \geqslant 2$ :

1. il existe $\varepsilon \in ]0, 1]$ tel que pour $f \in Y_{m'+2}$ avec $\|f\|_{Y_{m'+2}} \leqslant \varepsilon$, l'équation $\mathcal{F}(u) = f$ admet une solution $u \in X_{m'}$. Plus précisément, il existe $(u_n)_{n\geqslant 0} \subseteq X_\infty$ tel que :
   i. $u_{n+1} = u_n + (d\mathcal{F}(S_{\theta_n} u_n))^{-1} S_{\theta_n}(f - \mathcal{F}(u_n))$, avec $u_0 = 0$ et $\theta_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$,
   ii. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ dans $X_{m'}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{F}(u_n) = f$ dans $Y_{m'+1}$ ;
2. de plus, s'il existe $\exists\, m'' > m'$ tel que $f \in Y_{m''+2}$, alors la solution construite $u$ appartient à $X_{m''}$.

La seconde assertion prouve le maintien de la régularité de la solution trouvée par la méthode de Nash-Moser.

# 3. Preuve du théorème de Nash-Moser

## 1 Heuristique de la démonstration

On rappelle la construction de la suite définissant la méthode itérative de Nash-Moser :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{k+1} = u_k + (d\mathcal{F}(S_{\theta_k} u_k))^{-1} S_{\theta_k}(f - \mathcal{F}(u_k)), \end{cases} \tag{3.1}$$

où $(\theta_k)_k$ est une suite qui tend vers l'infini.

Nous souhaitons donc montrer que la suite $(u_k)_k$ converge vers $u$, une solution du problème initial, de telle sorte à obtenir la régularité voulue. Pour cela, nous montrerons que la suite $(u_k)_k$ ainsi définie est de Cauchy dans un espace de Banach, donc elle convergera, puis nous montrerons que sa limite est la solution voulue.

Le cœur de la démonstration du schéma itératif est, à l'instar de la décomposition dyadique, une certaine décomposition de $f$, et de $u$ en somme téléscopique de telle sorte à avoir une majoration suffisante sur les normes des différences entre deux termes consécutifs le décomposant. Pour cela, supposons que la suite $(u_k)_k$ satisfait une certaine hypothèse sur le pas de la suite, jusqu'au rang $n$, qui sera donnée plus tard.

On pose $\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}(0) = 0$. Notons également $f_k \overset{\text{def}}{=} S_{\theta_k}(f - \mathcal{F}(u_k))$. On a alors

$$f_k = d\mathcal{F}(S_{\theta_k} u_k)(u_{k+1} - u_k). \tag{3.2}$$

On définit l'erreur quadratique $e'_k$ issue de la méthode de Newton, et l'erreur de substitution $e''_k$ comme suit :

$$\mathcal{F}(u_{k+1}) - \mathcal{F}(u_k) = d\mathcal{F}(u_k)(u_{k+1} - u_k) + e'_k = d\mathcal{F}(S_{\theta_k} u_k)(u_{k+1} - u_k) + e'_k + e''_k = f_k + e'_k + e''_k.$$

On note l'erreur totale $e_k \overset{\text{def}}{=} e'_k + e''_k$, et l'erreur cumulée $E_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} e_k$.

En sommant de 0 à $n$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{F}(u_{k+1} - \mathcal{F}(u_k)) = \sum_{k=0}^{n} f_k + \sum_{k=0}^{n} (e'_k + e''_k) = \sum_{k=0}^{n} f_k + E_n + e_n. \tag{3.3}$$

Par somme téléscopique, on trouve :

$$\mathcal{F}(u_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} f_k + E_n + e_n.$$

De plus,

$$f_n = S_{\theta_n} f - S_{\theta_n} \mathcal{F}(u_n) = S_{\theta_n} f - \sum_{k=0}^{n-1} f_k - S_{\theta_n} E_n.$$

On obtient donc la construction de $f_n$ par la méthode :

$$\sum_{k=0}^{n} f_k + S_{\theta_n} E_n = S_{\theta_n} f. \tag{3.4}$$

En remplaçant $f_n$ dans (3.3), on trouve :

$$\mathcal{F}(u_{n+1}) = S_{\theta_n} f - S_{\theta_n} E_n + E_n + e_n.$$

Finalement, on obtient :

$$\mathcal{F}(u_{n+1}) - f = (S_{\theta_n} - \mathrm{Id}) f + (\mathrm{Id} - S_{\theta_n}) E_n + e_n. \tag{3.5}$$

$S_{\theta_n}$ tend vers Id lorsque $n$ tend vers l'infini. Nous allons démontrer dans la preuve que $e_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, pour avoir : $\mathcal{F}(u_{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$.

# 2 La récurrence

## 2.1 Préalables

Posons $(\theta_n)_n$ la suite croissante définie par $\theta_n = \sqrt{\theta_0^2 + n}$ et $\theta_0 \geqslant 1$.

**Lemme 3.0**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Delta_n \overset{\text{def}}{=} \theta_{n+1} - \theta_n$. La suite $(\Delta_n)_n$ est décroissante et converge vers 0. De plus,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{3\theta_n} \leqslant \Delta_n = \sqrt{\theta_n^2 + 1} - \theta_n \leqslant \frac{1}{2\theta_n},$$
$$\theta_{n-1} \leqslant \theta_n \leqslant \sqrt{2}\theta_{n-1} \quad \text{et} \quad \Delta_{n-1} \leqslant 3\Delta_n.$$

**Démonstration :** Rappelons premièrement que pour tout $x, y$ positifs, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x+y}$.

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} - \Delta_n &= (\theta_{n+2} - \theta_{n+1}) - (\theta_{n+1} - \theta_n) = \sqrt{\theta_0^2 + n + 2} - 2\sqrt{\theta_0^2 + n + 1} + \sqrt{\theta_0^2 + n} \\ &\leqslant \sqrt{2}\sqrt{(\theta_0^2 + n + 2) + (\theta_0^2 + n)} - 2\sqrt{\theta_0^2 + n + 1} = 2\sqrt{\theta_0^2 + n + 1} - 2\sqrt{\theta_0^2 + n + 1} = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(\Delta_n)_n$ est décroissante. Montrons maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta_n = 0$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \Delta_n = \theta_{n+1} - \theta_n = \sqrt{\theta_0^2 + n + 1} - \sqrt{\theta_0^2 + n} = \frac{1}{\sqrt{\theta_0^2 + n + 1} + \sqrt{\theta_0^2 + n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La suite $(\Delta_n)_n$ converge vers 0. Montrons l'égalité :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \Delta_n = \theta_{n+1} - \theta_n = \sqrt{\theta_0^2 + n + 1} - \theta_n = \sqrt{\left(\sqrt{\theta_0^2 + n}\right)^2 + 1} - \theta_n = \sqrt{\theta_n^2 + 1} - \theta_n.$$

Montrons maintenant la première suite d'inégalité. On a d'une part trivialement,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \Delta_n = \frac{1}{\sqrt{\theta_n^2 + 1} + \theta_n} \leqslant \frac{1}{2\theta_n}.$$

Et d'autre part, $\sqrt{\theta_n^2+1}+\theta_n \leqslant \sqrt{\theta_n^2+3\theta_n^2}+\theta_n = 3\theta_n$ car $(\theta_n)_n$ est une suite croissante et $\theta_0 \geqslant 1$. Ainsi,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \Delta_n = \frac{1}{\sqrt{\theta_n^2+1}+\theta_n} \geqslant \frac{1}{3\theta_n}.$$

Comme la suite $(\theta_n)_n$ est croissante, on a $\theta_{n-1} \leqslant \theta_n$. Montrons $\theta_n \leqslant \sqrt{2}\theta_{n-1}$ :

$$\sqrt{2}\theta_{n-1} - \theta_n = \frac{2(\theta_0^2+(n-1)) - (\theta_0^2+n)}{\sqrt{2}\theta_{n-1}+\theta_n} = \frac{\theta_0^2+n-2}{\sqrt{2}\theta_{n-1}+\theta_n} \geqslant 0.$$

Montrons enfin $\Delta_{n-1} \leqslant 3\Delta_n$ :

$$3\Delta_n - \Delta_{n-1} \geqslant \frac{1}{\theta_n} - \frac{1}{2\theta_{n-1}} = \frac{2\theta_{n-1}-\theta_n}{2\theta_{n-1}\theta_n} = \frac{4(\theta_0^2+(n-1)) - (\theta_0^2+n)}{2\theta_{n-1}\theta_n(2\theta_{n-1}+\theta_n)} = \frac{3\theta_0^2+3n-4}{2\theta_{n-1}\theta_n(2\theta_{n-1}+\theta_n)} \geqslant 0.$$

■

## 2.2 Introduction de la récurrence

Toute la démonstration du théorème de Nash-Moser repose sur un raisonnement par récurrence.

Pour simplifier les notations, posons $\delta u_k \overset{\text{def}}{=} u_{k+1} - u_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soient $\alpha \geqslant 1, \rho \in ]0,1[$ et $\tilde{\alpha} > \alpha$. On pose alors notre hypothèse de récurrence :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \forall\, m \in [\![0, \tilde{\alpha}]\!], \|\delta u_k\|_{X_m} \leqslant \rho \theta_k^{m-\alpha-1}\Delta_k. \tag{$H_{n-1}$}$$

Ce choix d'hypothèse est justifié puisque elle nous permettra de montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\delta u_k\|_{X_m}$ converge pour enfin voir que la suite $(u_k)_k$ est convergente. Nous allons montrer qu'avec un choix satisfaisant de $\theta_0$, $\rho$ et $\tilde{\alpha}$, et pour un $f$ assez petit, $(H_{n-1})$ implique $(H_n)$.

On suppose $(H_{n-1})$ vrai. Nous allons maintenant énoncer et démontrer plusieurs lemmes qui nous permettront de montrer $(H_n)$.

**Lemme 3.1**

Si $\theta_0$ est assez grand et choisi indépendamment de $\alpha$, alors $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$ et $\forall\, m \in [\![0, \tilde{\alpha}]\!]$ on a :

$$\|u_k\|_{X_m} \leqslant \rho \theta_k^{(m-\alpha)_+} \text{ pour } m \neq \alpha, \tag{3.6}$$

$$\|u_k\|_{X_\alpha} \leqslant \rho \log \theta_k. \tag{3.7}$$

**Démonstration :** Soient $k \in [\![0, n]\!]$, $m \in [\![0, \tilde{\alpha}]\!]$. Par inégalité triangulaire, on obtient une première majoration :

$$\|u_k\|_{X_m} = \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (u_{j+1}-u_j) + u_0 \right\|_{X_m} = \left\| \sum_{j=0}^{k-1} \delta u_j + u_0 \right\|_{X_m} \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} \|\delta u_j\|_{X_m} + \|u_0\|_{X_m} = \sum_{j=0}^{k-1} \|\delta u_j\|_{X_m}.$$

On applique l'hypothèse de récurrence $(H_{n-1})$ :

$$\|u_k\|_{X_m} \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} \rho \theta_j^{m-\alpha-1}\Delta_j.$$

Ainsi par le lemme 3.0, on a $\Delta_j \leqslant \dfrac{1}{2\theta_j}$, puis par comparaison séries intégrales on obtient :

$$\|u_k\|_{X_m} \leqslant \frac{\rho}{2}\sum_{j=0}^{k-1} \theta_j^{m-\alpha-2} \leqslant \frac{\rho}{2}\sum_{j=0}^{k-1} (\theta_0^2+j)^{\frac{m-\alpha}{2}-1} \leqslant \frac{\rho}{2}\int_0^k (\theta_0^2+x)^{\frac{m-\alpha}{2}-1}\mathrm{d}x.$$

- Si $m \neq \alpha$, alors $\dfrac{m-\alpha}{2} - 1 \neq -1$. Ainsi, après calcul de l'intégrale :

$$\|u_k\|_{X_m} \leqslant \frac{\rho}{m-\alpha}\left((\theta_0^2 + k)^{\frac{m-\alpha}{2}} - \theta_0^{m-\alpha}\right) = \frac{\rho}{m-\alpha}(\theta_k^{m-\alpha} - \theta_0^{m-\alpha}).$$

  - Si $m < \alpha$ alors, $\|u_k\|_{X_m} \leqslant \frac{\rho}{\alpha - m}\theta_0^{m-\alpha} \leqslant \rho = \rho\theta_k^{(m-\alpha)_+}$ ;
  - si $m > \alpha$ alors, $\|u_k\|_{X_m} \leqslant \frac{\rho}{m-\alpha}\theta_k^{m-\alpha} \leqslant \rho\theta_k^{(m-\alpha)_+}$.

- Si $m = \alpha$, alors $\dfrac{m-\alpha}{2} - 1 = -1$. Ainsi, après calcul de l'intégrale :

$$\|u_k\|_{X_\alpha} \leqslant \frac{\rho}{2}(\log(\theta_0 + k) - \log\theta_0) \leqslant \rho\log\theta_k.$$

■

**Lemme 3.2**

Si $\theta_0$ est assez grand et choisi indépendamment de $\alpha$, alors $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$ et $\forall\, m \in [\![0, \tilde{\alpha} + 1]\!]$ on a :

$$\|S_{\theta_k} u_k\|_{X_m} \leqslant C\rho\theta_k^{(m-\alpha)_+} \text{ pour } m \neq \alpha, \tag{3.8}$$

$$\|S_{\theta_k} u_k\|_{X_\alpha} \leqslant C\rho\log\theta_k. \tag{3.9}$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, et pour tout $m \in [\![0, \tilde{\alpha}]\!]$, on a de plus :

$$\|(I - S_{\theta_k})u_k\|_{X_m} \leqslant C\rho\theta_k^{m-\alpha}. \tag{3.10}$$

**Démonstration :** Soient $k \in [\![0, n]\!]$ et $m \in [\![0, \tilde{\alpha}]\!]$. On utilise l'inégalité 2.1 des opérateurs régularisants (avec $\alpha \to m$ et $\beta \to m$) :

$$\|S_{\theta_k} u_k\|_{X_m} \leqslant C\,\|u_k\|_{X_m}.$$

- Si $m \neq \alpha$, par le lemme 3.1, on a : $\|S_{\theta_k} u_k\|_{X_m} \leqslant C\rho\theta_k^{(m-\alpha)_+}$.
- Si $m = \alpha$, par le lemme 3.1, on a : $\|S_{\theta_k} u_k\|_{X_\alpha} \leqslant C\rho\log\theta_k$.

Si $m = \tilde{\alpha} + 1$, l'inégalité 2.1 donne (avec $\alpha \to \tilde{\alpha}$ et $\beta \to \tilde{\alpha} + 1$) :

$$\|S_{\theta_k} u_k\|_{X_{\tilde{\alpha}+1}} \leqslant C\theta_k^{(\tilde{\alpha}+1-\tilde{\alpha})_+}\,\|u_k\|_{X_{\tilde{\alpha}}} \leqslant C\theta_k\rho\theta_k^{(\tilde{\alpha}-\alpha)_+} \leqslant C\rho\theta_k^{(\tilde{\alpha}+1-\alpha)_+}.$$

La dernière inégalité suit de même. Soient $k \in [\![0, n]\!]$ et $m \in [\![0, \tilde{\alpha}]\!]$. On utilise l'inégalité 2.2 (avec $\alpha \to \alpha + 1$ et $\beta \to m$) et le lemme 3.1 :

$$\|S_{\theta_k} u_k - u_k\|_{X_m} \leqslant C\theta_k^{m-\alpha-1}\,\|u_k\|_{X_{\alpha+1}} \leqslant C\theta_k^{m-\alpha-1}\rho\theta_k^{(\alpha+1-\alpha)_+} = C\rho\theta_k^{m-\alpha}.$$

■

Les lemmes 3.0, 3.1 et 3.2 sont utiles dans toute la suite de la récurrence, ils permettent de prouver la majorité des lemmes ci-dessous.

## 2.3 Estimations des erreurs

### Estimation des erreurs quadratiques

On rappelle que l'on note $e_k'$ l'erreur dite quadratique issue de la méthode de Newton à l'itération $k$ :

$$e_k' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(u_{k+1}) - \mathcal{F}(u_k) - d\mathcal{F}(u_k)\delta u_k. \tag{3.11}$$

On se propose de trouver une estimation pour l'erreur quadratique.

**Lemme 3.3**

Soit $\alpha \geqslant 1$. Il existe $\rho > 0$ suffisamment petit et $\theta_0 \geqslant 1$ suffisamment grand, tous deux choisis indépendamment de $\alpha$, tels que $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\forall\, m \in [\![0, \tilde{\alpha}-1]\!]$, on a :

$$\left\|e_k'\right\|_{Y_m} \leqslant C\rho^2\theta_k^{m-2\alpha-2}\Delta_k. \tag{3.12}$$

**Démonstration :** Soient $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $m \in [\![0, \tilde{\alpha}-1]\!]$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral de Laplace sur les espaces de Banach, on écrit $\mathcal{F}(u_{k+1})$ de la manière suivante :

$$\mathcal{F}(u_{k+1}) = \mathcal{F}(u_k + \delta u_k) = \mathcal{F}(u_k) + d\mathcal{F}(u_k)(\delta u_k) + \int_0^1 (1-\tau)d^2\mathcal{F}(u_k + \tau\delta u_k)(\delta u_k, \delta u_k)d\tau.$$

L'erreur quadratique définie dans 3.11 peut alors être écrite comme cette dernière intégrale :

$$e_k' = \int_0^1 (1-\tau)d^2\mathcal{F}(u_k + \tau\delta u_k)(\delta u_k, \delta u_k)d\tau. \tag{$\star$}$$

Par l'inégalité triangulaire et l'homogénéité des normes, nous remarquons que :

$$\sup_{\tau \in [0,1]} \|u_k + \tau\delta u_k\|_{X_0} \leqslant \sup_{\tau \in [0,1]} \left(\|u_k\|_{X_0} + \tau\|\delta u_k\|_{X_0}\right) \leqslant \|u_k\|_{X_0} + \|\delta u_k\|_{X_0}.$$

D'après le lemme 3.1, $\|u_k\|_{X_0} \leqslant \rho\theta_k^{(-\alpha)_+} = \rho$. Nous avons par $(H_{n-1})$, $\|\delta u_k\|_{X_0} \leqslant \rho\theta_k^{-\alpha-1}\Delta_k$. Enfin par le lemme 3.0, nous avons $\theta_k^{-\alpha-1}\Delta_k \leqslant 1$, ce qui donne la majoration $\|\delta u_k\|_{X_0} \leqslant \rho$. Nous obtenons alors la majoration, $\sup_{\tau \in [0,1]} \|u_k + \tau\delta u_k\|_{X_0} \leqslant 2\rho$. Ainsi, pour $\rho$ suffisamment petit, l'hypothèse 1 appliquée à $u_k + \tau\delta u_k$ donne :

$$\begin{aligned}\left\|d^2\mathcal{F}(u_k + \tau\delta u_k)(\delta u_k, \delta u_k)\right\|_{Y_m} &\leqslant C\left(2\|\delta u_k\|_{X_{m+1}}\|\delta u_k\|_{X_0} + \|\delta u_k\|_{X_0}^2\left(1 + \|u_k + \tau\delta u_k\|_{X_{m+1}}\right)\right)\\ &\leqslant C\left(2\|\delta u_k\|_{X_{m+1}}\|\delta u_k\|_{X_0} + \|\delta u_k\|_{X_0}^2\left(1 + \|u_k\|_{X_{m+1}} + \|\delta u_k\|_{X_{m+1}}\right)\right).\end{aligned} \tag{3.13}$$

D'après l'hypothèse $(H_{n-1})$,

$$\left\|d^2\mathcal{F}(u_k + \tau\delta u_k)(\delta u_k, \delta u_k)\right\|_{Y_m} \leqslant C\left(2\rho^2\theta_k^{m+1-2\alpha-2}\Delta_k^2 + \rho^2\theta_k^{-2\alpha-2}\Delta_k^2\left(1 + \|u_k\|_{X_{m+1}} + \rho\theta_k^{m+1-\alpha-1}\Delta_k\right)\right).$$

Après simplification et factorisation par $\rho^2\theta_k^{m-2\alpha-2}\Delta_k$, nous obtenons :

$$\left\|d^2\mathcal{F}(u_k + \tau\delta u_k)(\delta u_k, \delta u_k)\right\|_{Y_m} \leqslant C\rho^2\theta_k^{m-2\alpha-2}\Delta_k\left(2\theta_k\Delta_k + \theta_k^{-m}\Delta_k\left(1 + \|u_k\|_{X_{m+1}} + \rho\theta_k^{m-\alpha}\Delta_k\right)\right).$$

Enfin, par le lemme 3.0 nous avons $\Delta_k \leqslant \frac{1}{2}\theta_k^{-1}$, d'où

$$\left\|d^2\mathcal{F}(u_k + \tau\delta u_k)(\delta u_k, \delta u_k)\right\|_{Y_m} \leqslant C\rho^2\theta_k^{m-2\alpha-2}\Delta_k\left(1 + \theta_k^{-m-1}\left(1 + \|u_k\|_{X_{m+1}} + \rho\theta_k^{m-\alpha-1}\right)\right).$$

Or, par le lemme 3.1,

$$\|u_k\|_{X_{m+1}} \leqslant \rho\theta_k^{(m+1-\alpha)_+} \quad \text{ou} \quad \|u_k\|_{X_{m+1}} \leqslant \rho\log\theta_k.$$

Dans les deux cas on peut majorer $\|u_k\|_{X_{m+1}}$ par $\rho\theta_k^{m+1}$ car $\theta_k^{(m+1-\alpha)_+} \leqslant \theta_k^{m+1}$ et $\log\theta_k \leqslant \theta_k^{m+1}$. D'où,

$$\left\|d^2\mathcal{F}(u_k + \tau\delta u_k)(\delta u_k, \delta u_k)\right\|_{Y_m} \leqslant C\rho^2\theta_k^{m-2\alpha-2}\Delta_k\left(1 + \theta_k^{-m-1}\left(1 + \rho\theta_k^{m+1} + \rho\theta_k^{m-\alpha-1}\right)\right).$$

On développe puis on majore $\theta_k^{-m-1}$ et $\theta_k^{-\alpha-2}$ par 1. On a ainsi

$$\left\|d^2\mathcal{F}(u_k + \tau\delta u_k)(\delta u_k, \delta u_k)\right\|_{Y_m} \leqslant C\rho^2\theta_k^{m-2\alpha-2}\Delta_k\left(1 + \theta_k^{-m-1} + \rho + \rho\theta_k^{-\alpha-2}\right) \leqslant C\rho^2\theta_k^{m-2\alpha-2}\Delta_k\left(2 + 2\rho\right).$$

Ainsi, pour $\rho \leqslant 1$ et en posant $C' = 4C$, on a :

$$\left\| d^2\mathcal{F}(u_k + \tau\delta u_k)(\delta u_k, \delta u_k) \right\|_{Y_m} \leqslant C'\rho^2\theta_k^{m-2\alpha-2}\Delta_k.$$

L'égalité ($\star$) nous donne alors :

$$\begin{aligned}\|e_k'\|_{Y_m} &= \left\| \int_0^1 (1-\tau)d^2\mathcal{F}(u_k + \tau\delta u_k)(\delta u_k, \delta u_k)d\tau \right\|_{Y_m} \leqslant \int_0^1 |1-\tau| \left\| d^2\mathcal{F}(u_k + \tau\delta u_k)(\delta u_k, \delta u_k) \right\|_{Y_m} d\tau \\ &\leqslant \int_0^1 \left\| d^2\mathcal{F}(u_k + \tau\delta u_k)(\delta u_k, \delta u_k) \right\|_{Y_m} d\tau \leqslant \left\| d^2\mathcal{F}(u_k + \tau\delta u_k)(\delta u_k, \delta u_k) \right\|_{Y_m} \leqslant C'\rho^2\theta_k^{m-2\alpha-2}\Delta_k.\end{aligned}$$

On a bien $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\forall\, m \in [\![0, \tilde{\alpha}-1]\!]$, $\|e_k'\|_{Y_m} \leqslant C'\rho^2\theta_k^{m-2\alpha-2}\Delta_k$. ■

### Estimation des erreurs de substitution

On rappelle que l'on note $e_k''$ l'erreur de substitution à l'itération $k$ :

$$e_k'' \stackrel{\text{def}}{=} d\mathcal{F}(u_k)\delta u_k - d\mathcal{F}(S_{\theta_k}u_k)\delta u_k. \tag{3.14}$$

On se propose de trouver une estimation pour l'erreur de substitution.

**Lemme 3.4**

Soit $\alpha \geqslant 1$. Il existe alors $\rho > 0$ suffisamment petit, et $\theta_0 \geqslant 1$ suffisamment grand, tous deux choisis indépendamment de $\alpha$, tels que $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\forall\, m \in [\![0, \tilde{\alpha}-1]\!]$, on a :

$$\|e_k''\|_{Y_m} \leqslant C\rho^2\theta_k^{m-2\alpha}\Delta_k. \tag{3.15}$$

**Démonstration :** L'erreur de substitution définie dans 3.14 peut être écrite de la manière suivante :

$$e_k'' = \int_0^1 d^2\mathcal{F}(S_{\theta_k}u_k + \tau(I - S_{\theta_k})u_k)(\delta u_k, (I - S_{\theta_k})u_k)d\tau.$$

On cherche à majorer $\|S_{\theta_k}u_k + \tau(I - S_{\theta_k})u_k\|_{X_0}$ pour appliquer de nouveau l'hypothèse 1. D'après le lemme 3.2,

$$\|S_{\theta_k}u_k\|_{X_0} \leqslant C\rho \quad \text{et} \quad \|(I - S_{\theta_k})u_k\|_{X_0} \leqslant C\rho\theta_k^{-\alpha} \leqslant C\rho.$$

Ainsi, $\sup\limits_{\tau \in [0,1]} \|S_{\theta_k}u_k + \tau(I - S_{\theta_k})u_k)\|_{X_0} \leqslant 2C\rho$. Comme $C$ est une constante qui ne dépend que de la norme choisie, on a bien une majoration de $\|S_{\theta_k}u_k + \tau(I - S_{\theta_k})u_k\|_{X_0}$ qui nous permet d'appliquer l'hypothèse 1 pour $\rho$ suffisamment petit.
Notons $\tilde{\beta} = \left\| d^2\mathcal{F}(S_{\theta_k}u_k + \tau(I - S_{\theta_k})u_k)(\delta u_k, (I - S_{\theta_k})u_k) \right\|_{Y_m}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} \leqslant C\Big( &\|\delta u_k\|_{X_{m+1}} \|(I - S_{\theta_k})u_k\|_{X_0} + \|\delta u_k\|_{X_0} \|(I - S_{\theta_k})u_k\|_{X_{m+1}} \\ &+ \|\delta u_k\|_{X_0} \|(I - S_{\theta_k})u_k\|_{X_0} \big(1 + \|S_{\theta_k}u_k + \tau(I - S_{\theta_k})u_k\|_{X_{m+1}}\big)\Big).\end{aligned} \tag{3.16}$$

On applique les majorations vues dans le lemme 3.2 et l'hypothèse de récurrence ($H_{n-1}$) :

$$\tilde{\beta} \leqslant C\rho^2\big(\theta_k^{m-\alpha}\Delta_k\, C\theta_k^{-\alpha} + \theta_k^{-\alpha-1}\Delta_k\, C\theta_k^{m+1-\alpha} + \theta_k^{-\alpha-1}\Delta_k\, C\theta_k^{-\alpha}(1 + \|S_{\theta_k}u_k\|_{X_{m+1}} + C\rho\theta_k^{m+1-\alpha}\big).$$

Par le lemme 3.2, $\|S_{\theta_k}u_k\|_{X_{m+1}} \leqslant \begin{cases} C\rho\theta_k^{(m+1-\alpha)_+} & \text{si } m \neq \alpha, \\ C\rho\log\theta_k & \text{si } m = \alpha. \end{cases}$ Dans les deux cas, on peut majorer par $C\rho\theta_k^{m+1}$.

Cette inégalité se factorise alors en :

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &\leqslant C\rho^2\big(C\theta_k^{m-2\alpha}\Delta_k + C\theta_k^{m-2\alpha}\Delta_k + C\theta_k^{-2\alpha-1}\Delta_k(1 + C\rho\theta_k^{m+1} + C\rho\theta_k^{m+1-\alpha})\big)\\ &\leqslant C\rho^2\theta_k^{m-2\alpha}\Delta_k(2C + \theta_k^{-m-1} + C\rho + C\rho\theta^{-\alpha}).\end{aligned}$$

Le terme entre parenthèses est majoré par une constante $C'$. On retrouve $\tilde{\beta} \leqslant C''\rho^2\theta_k^{m-2\alpha}\Delta_k$. Alors,

$$\|e''_k\|_{Y_m} \leqslant \int_0^1 \|d^2\mathcal{F}(S_{\theta_k}u_k + \tau(I - S_{\theta_k})u_k)(\delta u_k, (I - S_{\theta_k})u_k)\|_{Y_m} d\tau \leqslant \int_0^1 C''\rho^2\theta_k^{m-2\alpha}\Delta_k d\tau = C''\rho^2\theta_k^{m-2\alpha}\Delta_k.$$

■

Les lemmes 3.3 et 3.4 nous servent à avoir une approximation de $\|e_k\|_{Y_m}$.

### Estimation de l'erreur totale

Par l'inégalité triangulaire, on obtient directement la majoration de l'erreur $e_k = e'_k + e''_k$, à chaque étape de l'itération.

**Lemme 3.5**

Soit $\alpha \geqslant 1$. Il existe alors $\rho > 0$ suffisamment petit, et $\theta_0 \geqslant 1$ suffisamment grand, tous deux choisis indépendamment de $\alpha$, tels que $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\forall\, m \in [\![0, \tilde{\alpha} - 1]\!]$, on a :

$$\|e_k\|_{Y_m} \leqslant C\rho^2\theta_k^{m-2\alpha}\Delta_k. \tag{3.17}$$

**Démonstration :** Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $m \in [\![0, \tilde{\alpha} - 1]\!]$. Nous avons par définition $e_k = e'_k + e''_k$, par l'inégalité triangulaire et les lemmes 3.3 et 3.4 nous avons alors :

$$\|e_k\|_{Y_m} \leqslant \|e'_k\|_{Y_m} + \|e''_k\|_{Y_m} \leqslant C\rho^2\theta_k^{m-2\alpha-2}\Delta_k + C\rho^2\theta_k^{m-2\alpha}\Delta_k \leqslant 2C\rho^2\theta_k^{m-2\alpha}\Delta_k,$$

car $\theta_k \geqslant 1$. Puis en posant C'= 2C, nous avons : $\|e_k\|_{Y_m} \leqslant C'\rho^2\theta_k^{m-2\alpha}\Delta_k$. ■

### Estimation de l'erreur accumulée

Le lemme précédent donne alors une estimation de l'erreur $e_k$ à chaque étape. Donnons maintenant une estimation de l'erreur accumulée $E_n$ au bout de $n$ étapes. Notre but étant d'avoir une majoration maximale de l'erreur accumulée, on étudie une estimation de $E_n$ avec la plus grande norme pour laquelle nous avons les estimations précédentes, c'est-à-dire celle de l'espace $Y_{\tilde{\alpha}-1}$. De plus, le lemme suivant donnera une condition sur $\tilde{\alpha}$ que nous garderons jusqu'à la fin de la preuve.

**Lemme 3.6**

Soit $\alpha \geqslant 1$. Il existe alors $\rho > 0$ suffisamment petit, et $\theta_0 \geqslant 1$ suffisamment grand, tous deux choisis indépendamment de $\alpha$, tels que :

$$\|E_n\|_{Y_p} \leqslant C\rho^2\theta_n^{p-2\alpha+1}, \tag{3.18}$$

avec $p = \tilde{\alpha} - 1$.

**Démonstration :** On a par définition $E_n = \sum_{k=0}^{n-1} e_k$, ce qui nous donne par l'inégalité triangulaire :

$$\|E_n\|_{Y_p} = \left\|\sum_{k=0}^{n-1} e_k\right\|_{Y_p} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \|e_k\|_{Y_p}.$$

Puis par le lemme 3.5,

$$\|E_n\|_{Y_p} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} C\rho^2 \theta_k^{p-2\alpha} \Delta_k \leqslant C\rho^2 \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k^{p-2\alpha}(\theta_{k+1}-\theta_k) \leqslant C\rho^2 \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k^{p-2\alpha}\theta_{k+1} - \theta_k^{p-2\alpha+1}.$$

Nous posons la condition $p-2\alpha \geqslant 0$ pour avoir $\theta_k^{p-2\alpha} \leqslant \theta_{k+1}^{p-2\alpha}$ (afin d'obtenir une somme téléscopique), puis

$$\|E_n\|_{Y_p} \leqslant C\rho^2 \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k+1}^{p-2\alpha+1} - \theta_k^{p-2\alpha+1} \leqslant C\rho^2(\theta_n^{p-2\alpha+1} - \theta_0^{p-2\alpha+1}) \leqslant C\rho^2\theta_n^{p-2\alpha+1}.$$

car $\theta_0^{p-2\alpha+1} \geqslant 0$. ■

**Remarque 2**

Nous choisissons le plus petit $p$ permettant de majorer $E_n$ par une somme téléscopique. La condition $p-2\alpha \geqslant 0$ nous permet de choisir $p = 2\alpha$, puis $\tilde{\alpha} = 2\alpha+1$ dans l'hypothèse $(H_{n-1})$.

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de la preuve, nous posons $\tilde{\alpha} = 2\alpha + 1$.

## 2.4 Estimation de $f_n$

Dans le schéma itératif décrit précédemment, on avait défini $f_n$ de telle sorte à satisfaire l'équation 3.4, que l'on rappelle ici :

$$\sum_{k=0}^{n} f_k + S_{\theta_n}E_n = S_{\theta_n} f. \tag{3.4}$$

À partir de l'estimation de $E_n$ précédemment obtenue, on peut déterminer une majoration pour l'itéré $f_n$.

**Lemme 3.7**

Soit $\alpha \geqslant 1$. Si $\rho > 0$ est suffisamment petit et $\theta_0 \geqslant 1$ suffisamment grand, choisis indépendamment de $\alpha$, on a pour tout entier $m \in [\![0, 2\alpha+2]\!]$ :

$$\|f_n\|_{Y_m} \leqslant C\Delta_n \left(\theta_n^{m-\alpha-2}\|f\|_{Y_{\alpha+1}} + \rho^2\theta_n^{m-2\alpha}\right). \tag{3.19}$$

**Démonstration :** L'équation 3.4 ci-dessus donne :

$$f_n = -\sum_{k=0}^{n-1} f_k - S_{\theta_n}E_n + S_{\theta_n}f.$$

On réapplique l'équation 3.4 à $\sum_{k=0}^{n-1} f_k$ :

$$f_n = -(S_{\theta_{n-1}}f - S_{\theta_{n-1}}E_{n-1}) - S_{\theta_n}E_n + S_{\theta_n}f.$$

Puis par linéarité de $S_{\theta_{n-1}}$ et $S_{\theta_n}$ et comme $E_n = E_{n-1} + e_n$, on a alors :

$$f_n = (S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})f - (S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})E_{n-1} - S_{\theta_n}e_{n-1}.$$

À partir de l'inégalité 2.3 (avec $\alpha \to \alpha+1$ et $\beta \to m$), on trouve une estimation pour tout $m \in [\![0, 2\alpha+2]\!]$ :

$$\|(S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})f\|_{Y_m} = \left\|\int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} \frac{d}{d\theta}S_\theta f\, d\theta\right\|_{Y_m} \leqslant \sup_{\theta\in[\theta_{n-1},\theta_n]} \left\|\frac{d}{d\theta}S_\theta f\right\|_{Y_m} \Delta_{n-1} \leqslant \sup_{\theta\in[\theta_{n-1},\theta_n]} \theta^{m-\alpha-2}C\|f\|_{Y_{\alpha+1}}\Delta_{n-1}. \tag{3.20}$$

De plus comme $\theta_{n-1} \leqslant \theta_n \leqslant \sqrt{2}\theta_{n-1}$ et $\Delta_{n-1} \leqslant 3\Delta_n$ d'après le lemme 3.0, on a :

$$\left\|(S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})f\right\|_{Y_m} \leqslant 3\sqrt{2}C\Delta_n\theta_n^{m-\alpha-2}\left\|f\right\|_{Y_{\alpha+1}}.$$

De même, à partir de l'inégalité 2.3 (avec $\alpha \to p$ et $\beta \to m$) et de l'estimation de $E_n$ du lemme 3.6 :

$$\begin{aligned}\left\|(S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})E_{n-1}\right\|_{Y_m} &= \left\|\int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n}\frac{d}{d\theta}S_\theta E_{n-1}d\theta\right\|_{Y_m} \leqslant \sup_{\theta\in[\theta_{n-1},\theta_n]}\left\|\frac{d}{d\theta}S_\theta E_{n-1}f\right\|_{Y_m}\Delta_{n-1} \\ &\leqslant \sqrt{2}C\theta_n^{m-p-1}\Delta_{n-1}\left\|E_{n-1}\right\|_{Y_p} \leqslant \sqrt{2}C\Delta_{n-1}\theta_n^{m-p-1}C\rho^2\theta_{n-1}^{p-2\alpha+1} \leqslant 3\sqrt{2}C^2\Delta_n\theta_n^{m-2\alpha}\rho^2.\end{aligned}$$

À partir de l'inégalité 2.1 (avec $\alpha \mapsto m$ et $\beta \mapsto m$), et du lemme 3.5, on obtient directement pour tout $m$ :

$$\left\|S_{\theta_n}e_{n-1}\right\|_{Y_m} \leqslant C\theta_n^{(m-m)_+}\left\|e_{n-1}\right\|_{Y_m} \leqslant CC'\rho^2\theta_{n-1}^{m-2\alpha}\Delta_{n-1} \leqslant 3\sqrt{2}CC'\Delta_n\theta_n^{m-2\alpha}\rho^2.$$

En combinant les trois majorations précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|f_n\right\|_{Y_m} &\leqslant \left\|(S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})f\right\|_{Y_m} + \left\|(S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})E_{n-1}\right\|_{Y_m} + \left\|S_{\theta_n}e_{n-1}\right\|_{Y_m} \\ &\leqslant 3\sqrt{2}C\Delta_n\left(\theta_n^{m-\alpha-2}\left\|f\right\|_{Y_{\alpha+1}} + C\rho^2\theta_n^{m-2\alpha} + C\rho^2\theta_n^{m-2\alpha}\right) = 3\sqrt{2}C\Delta_n\left(\theta_n^{m-\alpha-2}\left\|f\right\|_{Y_{\alpha+1}} + 2C\rho^2\theta_n^{m-2\alpha}\right).\end{aligned}$$

Puis en posant $C'' = 6\sqrt{2}(C + CC')$,

$$\left\|f_n\right\|_{Y_m} \leqslant C''\Delta_n\left(\theta_n^{m-\alpha-2}\left\|f\right\|_{Y_{\alpha+1}} + \rho^2\theta_n^{m-2\alpha}\right).$$

■

## 2.5 Preuve de l'hérédité

On prouve finalement le fait que l'hypothèse de récurrence $(H_{n-1})$, supposée vraie au rang $n-1$, est vérifiée au rang $n$. Rappelons l'hypothèse de récurrence, avec la valeur définie pour $\tilde{\alpha}$ :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \forall\, m \in [\![0, 2\alpha+1]\!], \left\|\delta u_k\right\|_{X_m} \leqslant \rho\theta_k^{m-\alpha-1}\Delta_k. \tag{$H_{n-1}$}$$

On cherche donc à déterminer une majoration de $\delta u_n = u_{n+1} - u_n$, qui pour rappel est défini comme solution de l'équation 3.2 : $d\mathcal{F}(S_{\theta_n}u_n)\delta u_n = f_n$.

**Lemme 3.8**

Soit $\alpha \geqslant 3$. Si $\rho > 0$ est suffisamment petit, et $\theta_0 \geqslant 1$ est suffisamment grand, choisis indépendamment de $\alpha$, et si $\frac{\|f\|_{Y_{\alpha+1}}}{\rho}$ est suffisamment petit, alors pour tout entier $m \in [\![0, 2\alpha+1]\!]$,

$$\left\|\delta u_n\right\|_{X_m} \leqslant \rho\theta_n^{m-\alpha-1}\Delta_n. \tag{3.21}$$

**Démonstration :** D'après l'inégalité 3.8, $S_{\theta_n}u_n$ satisfait $\left\|S_{\theta_n}u_n\right\|_{X_0} \leqslant C\rho$ donc $S_{\theta_n}u_n$ est dans un voisinage ouvert borné de 0 dans $X_0$. Pour un $\rho$ suffisamment petit, on peut donc appliquer l'hypothèse 2 : il existe $\Psi(S_{\theta_n}u_n)$ tel que $\delta u_n = \Psi(S_{\theta_n}u_n)f_n$ avec $d\mathcal{F}(S_{\theta_n}u_n)\Psi(S_{\theta_n}u_n) = \mathrm{Id}$ et l'égalité 3.2 nous donne :

$$\left\|\delta u_n\right\|_{X_m} \leqslant C\left(\left\|f_n\right\|_{Y_{m+1}} + \left\|f_n\right\|_{Y_0}\left\|S_{\theta_n}u_n\right\|_{X_{m+1}}\right).$$

D'après le lemme 3.7 et l'inégalité 3.8 on obtient :

$$\left\|\delta u_n\right\|_{X_m} \leqslant C\Delta_n\left(\theta_n^{m-\alpha-1}\left\|f\right\|_{Y_{\alpha+1}} + \rho^2\theta_n^{m-2\alpha+1}\right) + C\Delta_n\left(\theta_n^{-\alpha-2}\left\|f\right\|_{Y_{\alpha+1}} + \rho^2\theta_n^{-2\alpha}\right)\rho\theta_n^{(m+1-\alpha)_+}. \tag{3.22}$$

Factorisons par $\theta_n^{m-\alpha-1}$ pour obtenir une bonne majoration. Il faut pour cela que les inégalités suivantes soient vérifiées. Notons que si $m+1-\alpha \leqslant 0$, on obtient des inégalités triviales. Pour $m+1-\alpha > 0$, $\alpha$ doit vérifier les trois inégalités :

| | | |
|---|---|---|
| $m-2\alpha+1 < m-\alpha-1$ | $-\alpha-2+(m+1-\alpha)_+ \leqslant m-\alpha-1$ | $-2\alpha+(m+1-\alpha)_+ < m-\alpha-1$ |
| $-\alpha < -2$ | $-\alpha-2+m+1-\alpha \leqslant m-\alpha-1$ | $-2\alpha+m+1-\alpha < m-\alpha-1$ |
| $\alpha > 2$ | $\alpha \geqslant 0$ | $\alpha > 1$ |

Ainsi, $\alpha$ doit satisfaire les trois hypothèses ci-dessus, c'est-à-dire être strictement supérieur à 2. Prenons $\alpha \geqslant 3$, on obtient :

$$\|\delta u_n\|_{X_m} \leqslant C\left(\|f\|_{Y_{\alpha+1}} + \rho^2 + (\|f\|_{Y_{\alpha+1}} + \rho^2)\cdot\rho\right)\theta_n^{m-\alpha-1}\Delta_n,$$

puis pour $\rho < 1$,

$$\|\delta u_n\|_{X_m} \leqslant 2C\left(\|f\|_{Y_{\alpha+1}} + \rho^2\right)\theta_n^{m-\alpha-1}\Delta_n = 2C\rho\left(\frac{\|f\|_{Y_{\alpha+1}}}{\rho} + \rho\right)\theta_n^{m-\alpha-1}\Delta_n.$$

Pour $\left(\frac{\|f\|_{Y_{\alpha+1}}}{\rho} + \rho\right) \leqslant \frac{1}{2C}$, c'est-à-dire pour $\rho$ et $\frac{\|f\|_{Y_{\alpha+1}}}{\rho}$ suffisamment petit, on a finalement :

$$\|\delta u_n\|_{X_m} \leqslant \rho\theta_n^{m-\alpha-1}\Delta_n.$$

■

On a donc prouvé :

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \forall\, m \in [\![0, 2\alpha+1]\!], \|\delta u_k\|_{X_m} \leqslant \rho\theta_k^{m-\alpha-1}\Delta_k. \tag{$H_n$}$$

**Point crucial de la méthode**

Les trois inégalités ci-dessus montrent la convergence de la méthode : les erreurs dues aux pertes de dérivées se compensent par le caractère quadratique de la méthode de Newton. La nature quadratique des erreurs est caractérisée par le $-2\alpha$ dans l'estimation de l'erreur totale trouvée dans le lemme 3.5 :

$$\|e_k\|_{Y_m} \leqslant C\rho^2\theta_k^{m-2\alpha}\Delta_k. \tag{3.17}$$

D'un autre côté, les estimations douces donnent (dans 3.20) cette majoration par $m-\alpha$, linéaire. Ainsi, pour un $\alpha$ suffisant grand (ici, supérieur ou égal à 3), on obtient la majoration souhaitée qui nous permet de conclure la récurrence.

## 2.6 Initialisation de la récurrence

Le lemme 3.8 montre que $(H_{n-1})$ implique $(H_n)$ avec $\alpha \geqslant 3$, $\tilde{\alpha} = 2\alpha+1$, $\rho > 0$ suffisamment petit et $\theta_0 \geqslant 1$ suffisamment grand. Nous utilisons donc ces conditions pour prouver l'initialisation $(H_0)$.

L'hypothèse de récurrence au rang 0 se formule :

$$\forall\, m \in [\![0, 2\alpha+1]\!], \|\delta u_0\|_{X_m} \leqslant \rho\theta_0^{m-\alpha-1}\Delta_0. \tag{$H_0$}$$

**Lemme 3.9**

Pour $\frac{\|f\|_{Y_{\alpha+1}}}{\rho}$ assez petit, la propriété $(H_0)$ est vraie.

**Démonstration :** D'après l'égalité 3.2 on a $d\mathcal{F}(0)\delta u_0 = S_{\theta_0} f$. D'après l'hypothèse 2, on a pour $\rho$ suffisamment petit $\|\delta u_0\|_{X_m} \leqslant C \|S_{\theta_0} f\|_{Y_{m+1}}$. D'après la majoration 2.1, on a :

$$\|\delta u_0\|_{X_m} \leqslant C\theta_0^{(m-\alpha)_+} \|f\|_{Y_{\alpha+1}} = \rho\theta_0^{m-\alpha-1}\Delta_0 \cdot C\theta_0^{(m-\alpha)_+-(m-\alpha)} \frac{\theta_0}{\Delta_0} \frac{\|f\|_{Y_{\alpha+1}}}{\rho}.$$

Pour $\frac{\|f\|_{Y_{\alpha+1}}}{\rho}$ suffisamment petit, on a $\frac{\|f\|_{Y_{\alpha+1}}}{\rho} \leqslant (C\theta_0^{(m-\alpha)_+-(m-\alpha)})^{-1}\frac{\Delta_0}{\theta_0}$ donc $\|\delta u_0\|_{X_m} \leqslant \rho\theta_0^{m-\alpha-1}\Delta_0$. ■

## 3 Conclusion de la preuve

On prend des valeurs de $\alpha$ et $\tilde{\alpha}$ permettant à la preuve par récurrence de fonctionner : $\alpha \geqslant 3$ en accord avec le lemme 3.8, et $\tilde{\alpha} = 2\alpha + 1$ en accord avec le lemme 3.6. Par ce qui précède, pour $\rho > 0$, $\|f\|_{Y_{\alpha+1}}/\rho$ pris tous deux suffisamment petit et $\theta_0$ suffisamment grand, l'inégalité $(H_{n-1})$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \forall\, m \in [\![0, \tilde{\alpha}]\!], \|\delta u_k\|_{X_m} \leqslant \rho\theta_k^{m-\alpha-1}\Delta_k.$$

On obtient alors d'après le lemme 3.0 :

$$\sum_{n\geqslant 0} \|\delta u_n\|_{X_m} \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \rho\theta_n^{m-\alpha-1}\Delta_n \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \rho\frac{\theta_n^{m-\alpha-1}}{2\theta_n} = \sum_{n\geqslant 0} \rho\frac{1}{2}(\theta_0^2 + n)^{\frac{m-\alpha-2}{2}}.$$

La série converge si et seulement si $m < \alpha$. Prenons donc le plus grand $m'$ vérifiant cette condition, c'est-à-dire $m' = \alpha - 1$. Alors $\sum_{n\geqslant 0} \|\delta u_n\|_{X_{m'}} < +\infty$. Il en suit $\|\delta u_n\|_{X_{m'}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire $\|u_{n+1} - u_n\|_{X_{m'}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme la série converge, la suite $(u_n)_n$ est donc de Cauchy dans $X_{m'}$. Or $X_{m'}$ est un espace de Banach, donc complet ; ainsi $(u_n)_n$ converge dans $X_{m'}$ vers $u \in X_{m'}$.

Montrons que $u$ est la solution du problème initial.

Dans le schéma itératif, on avait :

$$\mathcal{F}(u_{n+1}) - f = (S_{\theta_n} - \mathrm{Id})f + (\mathrm{Id} - S_{\theta_n})E_n + e_n. \tag{3.5}$$

Alors par la majoration 2.2 des opérateurs régularisants, et les majorations sur les erreurs obtenues dans les lemmes 3.5 et 3.6,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(u_{n+1}) - f\|_{Y_\alpha} &\leqslant \|S_{\theta_n} f - f\|_{Y_\alpha} + \|E_n - S_{\theta_n} E_n\|_{Y_\alpha} + \|e_n\|_{Y_\alpha} \\
&\leqslant C\theta_n^{-1} \|f\|_{Y_{\alpha+1}} + C\theta_n^{\alpha-p} \|E_n\|_{Y_p} + C\rho^2\theta_n^{-\alpha}\Delta_n \\
&\leqslant C\rho\theta_n^{-1}\left(\frac{\|f\|_{Y_{\alpha+1}}}{\rho} + \rho\theta_n^{-\alpha+2} + \rho\theta_n^{-\alpha+1}\Delta_n\right) \\
&\leqslant 3C\rho\theta_n^{-1}, \quad \text{car } \alpha \geqslant 3.
\end{aligned}$$

On remarque que $\theta_n^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, le terme de droite tend vers 0. On obtient alors par continuité de $\mathcal{F}$ que :

$$\mathcal{F}(u) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(u_{n+1}) = f.$$

Ainsi, $u$ est une solution du problème initial 1.1, et l'assertion **1** du théorème de Nash-Moser est vérifiée.

# 4 Régularité supplémentaire de la solution

On cherche finalement à prouver l'assertion **2** du théorème de Nash-Moser.

Supposons que la fonction $f$ admet une régularité plus grande, à savoir $f \in Y_{m''+2}$ pour $m'' > m'$. Posons alors $\alpha' = m''+1$, et similairement $\tilde{\alpha} = 2\alpha'+1$. Nous avons déjà prouvé qu'avec des paramètres bien fixés $\rho, \frac{\|f\|_{Y_{\alpha+1}}}{\rho}, \theta_0$, la récurrence fonctionne pour tout $n \geqslant 0$ ; on peut donc utiliser les estimations obtenues dans les lemmes précédents, pour tout $n$. Pour obtenir une condition de régularité supplémentaire, on revient sur la preuve du lemme 3.8. Dans sa démonstration, on utilisait la majoration suivante :

$$\|\delta u_n\|_{X_m} \leqslant C\Delta_n\left(\theta_n^{m-\alpha-1}\|f\|_{Y_{\alpha+1}} + \rho^2\theta_n^{m-2\alpha+1}\right) + C\Delta_n\left(\theta_n^{-\alpha-2}\|f\|_{Y_{\alpha+1}} + \rho^2\theta_n^{-2\alpha}\right)\rho\theta_n^{(m-\alpha+1)_+}. \tag{3.22}$$

Comme constaté dans les inégalités qui suivaient, les puissances des termes $\theta_n$ qui ne dépendaient pas de $f$ étaient strictement inférieures à $m-\alpha-1$. D'un autre côté, les puissances des autres termes $\theta_n$ dépendant de $f$, venaient de la majoration 3.20 du lemme 3.7 :

$$\|(S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})f\|_{Y_m} = \left\|\int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n}\frac{d}{d\theta}S_\theta f d\theta\right\|_{Y_m} \leqslant \sup_{\theta\in[\theta_{n-1},\theta_n]}\left\|\frac{d}{d\theta}S_\theta f\right\|_{Y_m}\Delta_{n-1} \leqslant C\theta_{n-1}^{m-\alpha-2}\Delta_{n-1}\|f\|_{Y_{\alpha+1}}. \tag{3.20}$$

Maintenant que $f$ est plus régulier, on peut obtenir une meilleure majoration que l'équation 3.20, en utilisant l'équation 2.3 (avec $\alpha \to \alpha+2$ et $\beta \to m$) :

$$\|(S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})f\|_{Y_m} = \left\|\int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n}\frac{d}{d\theta}S_\theta f d\theta\right\|_{Y_m} \leqslant \sup_{\theta\in[\theta_{n-1},\theta_n]}\left\|\frac{d}{d\theta}S_\theta f\right\|_{Y_m}\Delta_{n-1} \leqslant C\theta_{n-1}^{m-\alpha-3}\Delta_{n-1}\|f\|_{Y_{\alpha+2}}.$$

En poursuivant la preuve, on obtient donc une majoration de $\|f_n\|_{Y_m}$ différente, pour tout entier $m \in [\![0, \tilde{\alpha}+1]\!]$ :

$$\|f_n\|_{Y_m} \leqslant C\Delta_n\left(\theta_n^{m-\alpha-3}\|f\|_{Y_\alpha+2} + \rho^2\theta_n^{m-2\alpha}\right). \tag{3.23}$$

On obtient alors la majoration suivante :

$$\|\delta u_n\|_{X_m} \leqslant C\Delta_n\left(\theta_n^{m-\alpha-2}\|f\|_{Y_{\alpha+2}} + \rho^2\theta_n^{m-2\alpha+1}\right) + C\Delta_n\left(\theta_n^{-\alpha-2}\|f\|_{Y_{\alpha+1}} + \rho^2\theta_n^{-2\alpha}\right)\rho\theta_n^{(m-\alpha+1)_+}.$$

Pour $\alpha > 3$, d'après le lemme 3.8 le tout se factorise par $\theta_n^{m-\alpha-2}$ :

$$\|\delta u_n\|_{X_m} \leqslant C(\|f\|_{Y_{\alpha+2}} + \rho^2)\theta_n^{m-\alpha-2}\Delta_n \leqslant C\rho(\frac{\|f\|_{Y_{\alpha+2}}}{\rho} + \rho)\theta_n^{m-\alpha-2}\Delta_n \leqslant C\theta_n^{m-\alpha-2}\Delta_n.$$

où la dernière étape se justifie car on aurait pris $\frac{\|f\|_{Y_{\alpha+2}}}{\rho}$ suffisamment petit et $\rho \in ]0,1[$.

On refait alors la preuve du schéma de récurrence précédent, en utilisant à la place de l'hypothèse de récurrence $(H_n)$, cette meilleure estimation :

$$\forall\, n \geqslant 0, \forall\, m \in [\![0, \tilde{\alpha}]\!], \|\delta u_n\|_{X_m} \leqslant C\theta_n^{m-\alpha-2}\Delta_n \tag{3.24}$$

#### Estimations des erreurs

Les deux erreurs $e'_k$ et $e''_k$ se réécrivent avec cette nouvelle majoration, car $\|\delta u_n\|_{X_m}$ était présent dans chacun des termes de l'inégalité 3.13 du lemme 3.3, et 3.16 du lemme 3.4. En poursuivant la preuve avec cette meilleure estimation, on obtient :

$$\begin{aligned}\|e'_k\|_{Y_m} &\leqslant C\rho\theta_k^{m-2\alpha-4}\Delta_k,\\ \|e''_k\|_{Y_m} &\leqslant C\rho\theta_k^{m-2\alpha-1}\Delta_k,\\ \|e_k\|_{Y_m} &\leqslant C\rho\theta_k^{m-2\alpha-1}\Delta_k.\end{aligned}$$

Cela nous donne $\|e_k\|_{Y_{m+1}} \leqslant C\rho\theta_k^{m-2\alpha}\Delta_k$ pour $m \in [\![0, \tilde{\alpha}-1]\!]$. On a donc l'estimation sur une norme supplémentaire (celle de $Y_{\tilde{\alpha}}$), ce qui nous permet de calculer $\|E_n\|_{Y_{p+1}}$ (car $p = \tilde{\alpha} - 1$) similairement au lemme 3.6, avec également cette meilleure estimation 3.24 :

$$\|E_n\|_{Y_{p+1}} \leqslant C\rho\theta_n^{p-2\alpha+1}$$

#### Estimation de $f_n$

On poursuit avec la preuve du lemme 3.7, en utilisant cette information supplémentaire et la régularité additionnelle, pour obtenir une estimation de $\|f_n\|_{Y_{m+1}}$.

À partir de l'équation 2.3 (avec $\alpha \to \alpha + 2$ et $\beta \to m + 1$), on trouve une estimation :

$$\left\|(S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})f\right\|_{Y_{m+1}} \leqslant 3C\Delta_n\theta_n^{m-\alpha-2}\|f\|_{Y_{\alpha+2}}$$

À partir de l'équation 2.3 (avec $\alpha \to p + 1$ et $\beta \to m + 1$) et de la majoration précédente, on trouve :

$$\left\|(S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})E_{n-1}\right\|_{Y_{m+1}} \leqslant C\Delta_n\rho\theta_n^{m-2\alpha}$$

À partir de l'équation 2.1 (avec $\alpha \to m + 1$ et $\beta \to m + 1$) et de l'estimation sur $\|e_k\|_{Y_{m+1}}$, on trouve :

$$\|S_{\theta_n}e_{n-1}\|_{Y_{m+1}} \leqslant C\Delta_n\rho\theta_n^{m-2\alpha}$$

En combinant les trois précédentes majorations, on obtient, pour tout $m \in [\![0, \tilde{\alpha}+1]\!]$ :

$$\|f_n\|_{Y_{m+1}} \leqslant C\Delta_n(\theta_n^{m-\alpha-2}\|f\|_{Y_{\alpha+2}} + \rho\theta_n^{m-2\alpha}).$$

#### Estimation de $\delta u_n$

De la même manière, on reproduit de nouveau la preuve du lemme 3.8, avec cette information supplémentaire. $\rho$ a déjà été fixé afin de satisfaire l'hypothèse 2, on peut donc l'utiliser :

$$\|\delta u_n\|_{X_{m+1}} \leqslant C\left(\|f_n\|_{Y_{m+2}} + \|f_n\|_{Y_0}\|S_{\theta_n}u_n\|_{X_{m+2}}\right).$$

En utilisant l'estimation sur $f_n$, et le fait que les normes sont croissantes, on obtient

$$\|\delta u_n\|_{X_{m+1}} \leqslant C\Delta_n\left(\theta_n^{m-\alpha-1}\|f\|_{Y_{\alpha+2}} + \rho\theta_n^{m-2\alpha+2}\right) + C\Delta_n\left(\theta_n^{-\alpha-2}\|f\|_{Y_{\alpha+1}} + \rho^2\theta_n^{-2\alpha}\right)\rho\theta_n^{(m-\alpha+2)_+}.$$

Pour $\alpha > 3$, on peut factoriser par $\theta_n^{m-\alpha-1}$, et comme $\rho < 1$, on obtient :

$$\|\delta u_n\|_{X_{m+1}} \leqslant C(\|f\|_{Y_{\alpha+2}} + \rho)\theta_n^{m-\alpha-1}\Delta_n.$$

On a donc prouvé :

$$\forall\, n \geqslant 0, \forall\, m \in [\![0, \tilde{\alpha}+1]\!], \|\delta u_n\|_{X_m} \leqslant \rho \theta_n^{m-\alpha-2} \Delta_n,$$

soit un gain d'une information supplémentaire (celle sur $Y_{\tilde{\alpha}+1}$. On se sert ensuite de cette meilleure estimation à la place de 3.24. En réitérant ce procédé $m'' - m'$ fois, on prouve ainsi :

$$\forall\, n \geqslant 0, \forall\, m \in [\![0, \tilde{\alpha}']\!], \|\delta u_n\|_{X_m} \leqslant C \theta_n^{m-\alpha'-1} \Delta_n.$$

### Conclusion

On conclut, comme dans la partie 3, que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $X_{m''}$, donc converge vers $u \in X_{m''}$. On a déjà montré précédemment que ce $u$ est solution du problème initial. On a donc prouvé l'assertion **2.** du théorème de Nash-Moser.

# 4. Cas où $\alpha = 3$

Afin de mieux comprendre le cheminement de la preuve, on se propose de revenir sur son fonctionnement une fois les paramètres bien définis. Nous avons vu dans le lemme 3.8 que dans notre cas, la récurrence nécessite le choix d'un paramètre $\alpha \geqslant 3$. Considérons donc ci-dessous le cas minimal, c'est-à-dire $\alpha = 3$.

Le choix $\alpha = 3$ donne les constantes $\tilde{\alpha} = 7, m' = 2$. Le plus petit espace de Banach sur lequel la méthode de Nash-Moser agit est alors $X_8$. On peut donc se restreindre à travailler sur des familles finies d'espaces de Banach $X_0 \supset \cdots \supset X_8$ et $Y_0 \supset \cdots \supset Y_8$. Les opérateurs régularisants établis dans la définition 2.1 peuvent être vus comme à valeurs dans $X_8$ et $Y_8$.

Le théorème de Nash-Moser s'énonce alors comme suit :

**Théorème *(Nash-Moser) (cas simple)***

Soient des espaces de Banach $X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_8$, et $Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_8$ satisfaisant l'hypothèse de régularisation. Supposons vraies les hypothèses 1 et 2. Il existe $\varepsilon \in ]0,1]$ tel que pour $f \in Y_4$ avec $\|f\|_{Y_4} \leqslant \varepsilon$, alors l'équation $\mathcal{F}(u) = f$ admet une solution $u \in X_2$. Plus précisément, il existe $(u_n)_{n\geqslant 0} \subseteq X_8$ tel que :

i. $u_{n+1} = u_n + (d\mathcal{F}(S_{\theta_n} u_n))^{-1} S_{\theta_n}(f - \mathcal{F}(u_n))$, avec $u_0 = 0$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \theta_k = +\infty$.

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ dans $X_2$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{F}(u_n) = f$ dans $Y_3$.

L'hypothèse $(H_{n-1})$ devient :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \forall\, m \in [\![0,7]\!], \|\delta u_k\|_{X_m} \leqslant \rho\theta_k^{m-4}\Delta_k. \tag{4.1}$$

**Lemme 3.8 (*cas simple*)**

Si $\rho > 0$ est suffisamment petit et $\theta_0 \geqslant 1$ est suffisamment grand et si $\frac{\|f\|_{Y_4}}{\rho}$ est suffisamment petit, alors pour tout entier $m \in [\![0,7]\!]$,

$$\|\delta u_n\|_{X_m} \leqslant \rho\theta_n^{m-4}\Delta_n. \tag{3.2}$$

Montrons que $(H_{n-1})$ implique $(H_n)$, c'est-à-dire montrons que le lemme 3.8 est vrai.

**Démonstration :** D'après l'inégalité 3.8, $S_{\theta_n} u_n$ satisfait $\|S_{\theta_n} u_n\|_{X_0} \leqslant C\rho$ donc $S_{\theta_n} u_n$ est dans un voisinage ouvert borné de 0 dans $X_0$. Pour un $\rho$ suffisamment petit, on peut donc appliquer l'hypothèse 2 : il existe $\Psi(S_{\theta_n} u_n)$ tel que $\delta u_n = \Psi(S_{\theta_n} u_n) f_n$ avec $d\mathcal{F}(S_{\theta_n} u_n)\Psi(S_{\theta_n} u_n) = \mathrm{Id}$ et l'égalité 3.2 nous donne :

$$\|\delta u_n\|_{X_m} \leqslant C\left(\|f_n\|_{Y_{m+1}} + \|f_n\|_{Y_0}\|S_{\theta_n} u_n\|_{X_{m+1}}\right).$$

D'après le lemme 3.7 et l'inégalité 3.8 on obtient

$$\begin{aligned}
\|\delta u_n\|_{X_m} &\leqslant C\Delta_n\left(\theta_n^{m-4}\|f\|_{Y_4} + \rho^2\theta_n^{m-5}\right) + C\Delta_n\left(\theta_n^{-5}\|f\|_{Y_4} + \rho^2\theta_n^{-6}\right)\rho\theta_n^{(m-2)_+} \\
&\leqslant C\Delta_n\theta_n^{m-4}\left(\|f\|_{Y_4} + \rho^2 + \rho\|f\|_{Y_4} + \rho^2\cdot\rho\right) \quad \text{pour } \rho \leqslant 1 \\
&\leqslant \rho\theta_n^{m-4}\Delta_n \cdot 2C\left(\frac{\|f\|_{Y_4}}{\rho} + \rho\right).
\end{aligned}$$

Pour $\left(\frac{\|f\|_{Y_4}}{\rho} + \rho\right) \leqslant \frac{1}{2C}$, on a finalement $\|\delta u_n\|_{X_m} \leqslant \rho\theta_n^{m-4}\Delta_n$. ■

**Lemme 3.9 (*cas simple*)**

> Pour $\frac{\|f\|_{Y_4}}{\rho}$ assez petit, on a $(H_0)$.

**Démonstration :** D'après l'égalité 3.2 on a $d\mathcal{F}(0)\delta u_0 = S_{\theta_0}f$. D'après l'hypothèse 2, on a pour $\rho$ suffisamment petit $\|\delta u_0\|_{X_m} \leqslant C\|S_{\theta_0}f\|_{Y_{m+1}}$. D'après la majoration 2.1, on a :

$$\|\delta u_0\|_{X_m} \leqslant C\theta_0^{(m-3)_+}\|f\|_{Y_4} = \rho\theta_0^{m-4}\Delta_0 \cdot C\theta_0^{(m-3)_+-(m-3)}\frac{\theta_0}{\Delta_0}\frac{\|f\|_{Y_4}}{\rho}.$$

Pour $\frac{\|f\|_{Y_4}}{\rho}$ suffisamment petit, on a $\frac{\|f\|_{Y_4}}{\rho} \leqslant (C\theta_0^{(m-3)_+-(m-3)})^{-1}\frac{\Delta_0}{\theta_0}$ donc $\|\delta u_0\|_{X_m} \leqslant \rho\theta_0^{m-4}\Delta_0$. ■

Les lemmes 3.9 et 3.8 assurent respectivement l'initialisation et l'hérédité de la récurrence.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in [\![0,7]\!]$, $\|\delta u_k\|_{X_m} \leqslant \rho\theta_k^{m-4}\Delta_k$. Ainsi,

$$\sum_{k\geqslant 0}\|\delta u_k\|_{X_m} \leqslant \rho\sum_{k\geqslant 0}\theta_k^{m-4}\Delta_k \leqslant \frac{\rho}{2}\sum_{k\geqslant 0}\theta_k^{m-5} = \frac{\rho}{2}\sum_{k\geqslant 0}(\theta_0^2+k)^{\frac{m-5}{2}}.$$

La série converge si et seulement si $\frac{m-5}{2} < -1$, c'est-à-dire pour $m < 3$. En particulier la suite $(u_k)_k$ est de Cauchy dans $X_2$ et comme $X_2$ est un espace de Banach, $(u_k)_k$ converge vers $u \in X_2$.

Nous avons montré que la suite $(u_k)_k$ converge vers $u \in X_2$. Montrons désormais que $u$ est la solution du problème initial.

**Lemme 3.5 (*cas simple*)**

> Il existe un $\rho > 0$ suffisamment petit, et $\theta_0 \geqslant 1$ suffisamment grand, tels que $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\forall\, m \in [\![0,6]\!]$, on a :
>
> $$\|e_k\|_{Y_m} \leqslant C\rho^2\theta_k^{m-6}\Delta_k.$$

**Lemme 3.6 (*cas simple*)**

> Il existe un $\rho > 0$ suffisamment petit, et $\theta_0 \geqslant 1$ suffisamment grand, tels que :
>
> $$\|E_n\|_{Y_6} \leqslant C\rho^2\theta_n.$$

Par la majoration 2.2 des opérateurs de régularisation, et les majorations sur les erreurs obtenues dans les lemmes 3.5 et 3.6,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(u_{n+1}) - f\| &\leqslant \|S_{\theta_n}f - f\|_{Y_3} + \|E_n - S_{\theta_n}E_n\|_{Y_3} + \|e_n\|_{Y_3} \leqslant C\theta_n^{-1}\|f\|_{Y_4} + C\theta_n^{-3}\|E_n\|_{Y_6} + C\rho^2\theta_n^{-3}\Delta_n \\ &\leqslant C\rho\theta_n^{-1}\left(\frac{\|f\|_{Y_4}}{\rho} + \rho\theta_n^{-1} + \rho\theta_n^{-2}\Delta_n\right) \leqslant 3C\rho\theta_n^{-1}.\end{aligned}$$

On remarque que $\lim_{n\to+\infty}\theta_n^{-1} = 0$. On obtient alors par continuité de $\mathcal{F}$ que :

$$\mathcal{F}(u) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{F}(u_{n+1}) = f.$$

Ainsi, $u$ est une solution du problème initial, et l'assertion est vérifiée.

# Notations

Ce tableau contient les différentes notations utilisées dans la preuve du théorème de Nash-Moser.

| | **condition** | **description** | **défini en** |
|---|---|---|---|
| $(X_m)_m$<br>$(Y_m)_m$ | $m \in \mathbb{N}$ | Suites décroissantes d'espaces de Banach | page 12 |
| $X_\infty$<br>$Y_\infty$ | | $= \bigcap\limits_{m \geqslant 0} X_m$<br>$= \bigcap\limits_{m \geqslant 0} Y_m$ | page 12 |
| $\mathcal{F}$ | | Application d'un Banach dans un Banach | page 12 |
| $d\mathcal{F}$ | | Différentielle de $\mathcal{F}$ | page 12 |
| $(u_k)_k$ | | Suite de la méthode de Nash-Moser | page 12 |
| $f$ | | Petite perturbation | page 12 |
| $\{S_\theta\}_\theta$ | | Famille d'opérateurs de régularisation | page 12 |
| $(t)_+$ | $t \in \mathbb{Z}$ | $= \max(0, t)$ | page 12 |
| $U$ | | Voisinage ouvert borné de 0 dans $X_0$ | page 13 |
| $\Psi$ | | Une application telle que $d\mathcal{F}(u)\Psi(u) = Id$ | page 13 |
| $m'$ | $\in \mathbb{N}$ | $m' + 2$ est l'indice de régularité de $f$ | page 13 |
| $f_k$ | $= S_{\theta_k}(f - \mathcal{F}(u_k))$ | Élément de l'itération de Nash-Moser | page 14 |
| $e'_k$ | | Erreur quadratique de la méthode de Newton (cf. page 7) | page 14 |
| $e''_k$ | | Erreur de substitution (cf. page 11) | page 14 |
| $e_k$ | $= e'_k + e''_k$ | Somme des deux erreurs | page 14 |
| $E_n$ | $= \sum_{k=0}^{n-1} e_k$ | Somme cumulée des erreurs | page 14 |
| $(\theta_k)_k$ | $= \sqrt{\theta_0^2 + k}$ | Une suite qui tend vers l'infini | page 15 |
| $(\Delta_k)_k$ | $\Delta_k = \theta_{k+1} - \theta_k$ | Différence entre deux termes consécutifs de la suite $(\theta_n)_n$ | page 15 |
| $\rho$ | $\in ]0, 1[$ | Élément assez petit | page 16 |
| $\delta u_k$ | $= u_{k+1} - u_k$ | Différence entre deux termes consécutifs de la suite $(u_k)_k$ | page 16 |
| $\alpha$ | | Un entier *fixé a posteriori dans la récurrence* | page 16 |
| $\tilde{\alpha}$ | $> \alpha$ | Borne max de l'intervalle des $m$ vérifiant l'hypothèse<br>de récurrence, *fixé a posteriori dans la preuve* | page 16 |
| $p$ | $= \tilde{\alpha} - 1$ | Indice maximal des $m$ pour lesquels nous avons<br>des informations sur $\|e_k\|_{Y_m}$ | page 20 |
| C | $> 0$ | Constantes utilisées dans les différents lemmes | |

# Bibliographie


ALINHAC, Serge et Patrick GÉRARD (1991). *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. fre. Savoirs actuels. Paris : InterEditions Ed. du CNRS. ISBN : 9782729603649 9782222045342.

AVEZ, André (1983). *Calcul différentiel*. fre. Collection Maîtrise de mathématiques pures. Paris : Pergamon. ISBN : 9782225790799.

GÉRARD-VARET, David (2019). *Around the Nash-Moser theorem*. URL : https://dgerardv.github.io/files/poly__Nash_Moser_Feb2019.pdf (visité le 11/05/2022).

NASH, John (1956). « The imbedding problem for riemannian manifolds ». In : *The Annals of Mathematics* 63.1, p. 20. ISSN : 0003486X. DOI : 10.2307/1969989.

SECCHI, Paolo (2016). « On the Nash-Moser iteration technique ». In : *Recent Developments of Mathematical Fluid Mechanics*. Sous la dir. d'Herbert AMANN et al. Basel : Springer Basel, p. 443-457. ISBN : 9783034809382 9783034809399. DOI : 10.1007/978-3-0348-0939-9_23.